

# Star-représentations sur des sous-variétés coïsootropes

Martin Bordemann,

Laboratoire des Mathématiques et Applications  
Faculté des Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace  
4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France  
e-mail : M.Bordemann@univ-mulhouse.fr

Grégory Ginot<sup>(a)</sup>, Gilles Halbout<sup>(b)</sup>

Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg  
Université Louis Pasteur et CNRS  
7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France  
<sup>(a)</sup> e-mail : ginot@math.u-strasbg.fr  
<sup>(b)</sup> e-mail : halbout@math.u-strasbg.fr

Hans-Christian Herbig<sup>(c)</sup>, Stefan Waldmann<sup>(d)</sup>

Fakultät für Physik  
Albert-Ludwigs Universität Freiburg  
Hermann-Herder-Str. 2, D-79104 Freiburg i. Br., R.F.A.  
<sup>(c)</sup> e-mail : herbig@majestix.physik.uni-freiburg.de  
<sup>(d)</sup> e-mail : Stefan.Waldmann@physik.uni-freiburg.de

1 février 2008

## Résumé

Soit  $X$  une variété de Poisson et  $C$  une sous-variété coïso trope par rapport au crochet de Poisson. Soit  $\mathcal{I}$  l'idéal des fonctions nulles sur  $C$ . Dans ce travail nous étudions comment construire des star-produits  $\star$  sur  $\mathcal{A} = C^\infty(X)[[h]]$  pour lesquels  $\mathcal{I}[[h]]$  est un idéal à gauche de manière à obtenir une représentation de  $(\mathcal{A}, \star)$  sur  $\mathcal{B}[[h]] = \mathcal{A}[[h]]/\mathcal{I}[[h]]$ , déformant la représentation naturelle de  $\mathcal{A}$  sur  $C^\infty(C)$ . Pour cela nous montrons comment un tel résultat peut se déduire d'une généralisation de la conjecture de formalité de Tamarkin aux cochaînes compatibles avec le crochet de Poisson.

Nous démontrons d'abord un théorème à la Hochschild-Kostant-Rosenberg entre l'espace  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  des champs de multivecteurs compatibles avec  $C$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , un espace naturel d'opérateurs multidifférentiels compatibles avec  $C$ . Ensuite nous mettons en évidence l'existence d'une structure  $G_\infty$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et montrons enfin que les obstructions à l'existence d'une formalité sont contrôlées par des groupes de cohomologie. Dans le

cas où  $X = \mathbb{R}^n$  et  $C = \mathbb{R}^{n-\nu}$ , nous explicitons et réduisons ces groupes. Nous conjecturons que ces obstructions sont nulles dans le cas  $\nu = 1$ , ce qui reprouverait, après globalisation, ‘à la Dolgushev-Fedosov’ l’existence de star-représentations dans le cas des sous-variétés de codimension 1. Pour des codimensions supérieures il n’est pas impossible qu’il y ait des obstructions, liées à certaines classes caractéristiques des feuilletages qui apparaissent dans le cas symplectique.

**Keywords :** Deformation quantization, star-product, homology

**AMS Classification :** Primary 16E40, 53D55, Secondary 18D50, 16S80

## 1 Introduction

Soit  $X$  une variété différentiable de dimension  $n$  et  $i : C \rightarrow X$  une sous-variété fermée de codimension  $l \leq n$ . Soit  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(C, \mathbb{R})$  et

$$\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{A} \mid f(c) = 0 \ \forall c \in C\}$$

l’idéal annulateur de  $C$ . En utilisant un voisinage tubulaire autour de  $C$  et une partition de l’unité on voit que la suite d’algèbres commutatives

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i^*} \mathcal{B} \longrightarrow \{0\} \quad (1.1)$$

est exacte. Soit  $c \in C$  et

$$T_c C^{\text{ann}} = \{\beta \in T_c X^* \mid \beta(v) = 0 \ \forall v \in T_c C\}.$$

Soit  $P \in \Gamma(X, \Lambda^2 TX)$  une structure de Poisson. La sous-variété  $C$  est dite *coïso trope par rapport à  $P$*  si

$$P_c(\beta, \gamma) = 0 \quad \text{quels que soient } c \in C; \beta, \gamma \in T_c C^{\text{ann}}. \quad (1.2)$$

Une condition algébrique équivalente est

$$\mathcal{I} \text{ est une sous-algèbre de Poisson de } \mathcal{A}.$$

De manière générale, on définit

**Définition 1.1** *Un champ de multivecteurs  $P \in \Gamma(X, \Lambda^k TX)$  est dit compatible avec  $C$  (ou adapté à  $C$ ) si*

$$P_c(\beta_1, \dots, \beta_k) = 0 \quad \text{quels que soient } c \in C; \beta_1, \dots, \beta_k \in T_c C^{\text{ann}}. \quad (1.3)$$

Lorsque  $P \in \mathcal{A} = \Gamma(X, \Lambda^0 TX)$ , cette condition équivaut à  $P \in \mathcal{I}$ .

Rappelons qu’un star-produit  $\star$  sur la variété de Poisson  $(X, P)$  est une multiplication associative  $\mathbb{R}[[h]]$ -bilinéaire sur le  $\mathbb{R}[[h]]$ -module  $\mathcal{A}[[h]]$  telle que pour tous  $f, g \in \mathcal{A}$ ,

- (i)  $f \star g = fg + hC_1(f, g) + \sum_{k \leq 2} h^k C_k(f, g)$ ,
- (ii)  $C_1(f, g) - C_1(g, f) = P(df, dg)$ ,
- (iii) les  $(C_r)_{r \geq 1}$  sont des opérateurs bidifférentiels.
- (iv)  $C_r(f, 1) = 0 = C_r(1, f)$  quel que soit  $r \geq 1$ .

Soit  $P$  une structure de Poisson compatible avec  $C$  (au sens de la Définition 1.1). Le but de ce travail est de continuer le travail [2] (dans lequel surtout le cas symplectique et les obstructions possibles sont étudiées) par la construction des star-produits  $\star$  sur  $X$  pour lesquels l'espace  $\mathcal{I}[[h]]$  est un idéal à gauche. De cette façon, on obtiendra des représentations de  $(\mathcal{A}[[h]], *)$  sur l'espace  $\mathcal{B}[[h]] = \mathcal{A}[[h]]/\mathcal{I}[[h]]$ . Ceci correspond au “coisotropic creed” prononcé par Jiang-Hua Lu [14], c'est-à-dire, la quantification des sous-variétés coisotropes par des idéaux à gauche de l'algèbre  $\mathcal{A}$  déformée (voir également [3] pour cette approche dans le cadre de la réduction Marsden-Weinstein). Ce problème est intimement lié à celui des quantification des morphismes de Poisson, voir [2] pour des détails.

Soit  $k$  un entier strictement positif et soient  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k, \mathcal{M}$  des  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$ -bimodules. Définissons

$$\mathbf{D}^k(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k; \mathcal{M}) = \{ \phi : \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_k \rightarrow \mathcal{M} \mid \phi \text{ est } k\text{-multidifférentielle} \}$$

On écrira  $\mathbf{D}^k(\mathcal{M}_1; \mathcal{M})$  au lieu de l'expression ci-dessus lorsque tous les modules  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_k$  sont égaux à  $\mathcal{M}_1$ . Pour  $k = 0$  on pose  $\mathbf{D}^0(\ ; \mathcal{M}) = \mathcal{M}$ , et on convient que  $\mathbf{D}^k$  s'annule lorsque  $k \leq -1$ .  $\mathbf{D}^1(\mathcal{M}_1; \mathcal{M})$  est considéré comme un  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}$ -bimodule par  $(f\phi g)(\eta) = f\phi(g\eta)$  quels que soient  $f, g \in \mathcal{A}, \phi \in \mathbf{D}^1(\mathcal{M}_1; \mathcal{M})$  et  $\eta \in \mathcal{M}_1$ . Soit  $\mathfrak{G} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}^k$  l'espace des cochaînes de Gerstenhaber où

$$\mathfrak{G}^k = \mathbf{D}^k(\mathcal{A}; \mathcal{A}).$$

Par analogie avec les champs de multivecteurs, définissons maintenant les cochaînes compatibles dont le rôle sera très important pour la suite de notre étude :

**Définition 1.2** *Le sous-espace  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^k$  de  $\mathfrak{G}$  des cochaînes compatibles est défini comme suit :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^k &= \{ \phi \in \mathfrak{G}^k \mid \phi(f_1, \dots, f_{k-1}, g) \in \mathcal{I}, \\ &\quad \forall f_1, \dots, f_{k-1} \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{I} \} \text{ (pour } k \geq 1), \\ \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^0 &= \mathcal{I}, \\ \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^k &= \{0\} \text{ pour } k \leq -1. \end{aligned}$$

Il est alors évident qu'un star-produit  $\star$  est tel que  $\mathcal{I}[[h]]$  est un idéal à gauche dans  $(\mathcal{A}[[h]], *)$  si et seulement si les opérateurs bidifférentiels  $(C_r)_{r \leq 0}$  le définissant appartiennent au sous-espace  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^2$ . Dans ce papier, nous allons étudier comment la construction de Tamarkin des morphismes de formalité (impliquant l'existence de star-produits) peut se restreindre à un morphisme allant des champs de tenseurs compatibles vers les *cochaînes compatibles* (et donc impliquant l'existence de star-représentation).

Pour la suite de notre travail, nous définissons  $\tilde{\mathfrak{G}} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{G}}^k$  où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{G}}^k &= \mathbf{D}^{k-1}(\mathcal{A}; \mathbf{D}^1(\mathcal{I}; \mathcal{B})) \text{ (pour } k \geq 1), \\ \tilde{\mathfrak{G}}^0 &= \mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathcal{B}, \\ \tilde{\mathfrak{G}}^k &= \{0\} \text{ pour } k \leq -1.\end{aligned}$$

D'autre part, on peut définir des analogues des sous-espaces  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et  $\tilde{\mathfrak{G}}$  ( $\in \mathfrak{G}$ ) dans l'espace des champs de multivecteurs  $\mathfrak{g} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^k$  où

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^k &= \Gamma(X, \Lambda^k TX) \text{ (pour } k \geq 0), \\ \mathfrak{g}^k &= \{0\} \text{ pour } k \leq -1.\end{aligned}$$

L'analogue de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  est  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$  le sous-espace de  $\mathfrak{g}$  où

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k &= \{P \in \Gamma(X, \Lambda^k TX) \mid P_c(\beta_1, \dots, \beta_k) = 0, \\ &\quad \forall c \in C; \beta_1, \dots, \beta_k \in T_c C^{\text{ann}}\} \text{ (pour } k \geq 1), \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^0 &= \mathcal{I} \\ \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k &= \{0\} \text{ pour } k \leq -1.\end{aligned}$$

L'analogue de  $\tilde{\mathfrak{G}}$  est l'espace  $\tilde{\mathfrak{g}} = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}^k$  où

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{g}}^k &= \Gamma(C, \Lambda^k(T_C X / T_C)) \text{ (pour } k \geq 1), \\ \tilde{\mathfrak{g}}^0 &= \mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{I} \\ \tilde{\mathfrak{g}}^k &= \{0\} \text{ pour } k \leq -1.\end{aligned}$$

Ce papier se présente comme ceci :

- Dans la Section 2, nous allons montrer un analogue du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg pour les cochaînes compatibles  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$ . Plus précisément, on a les suites exactes :

$$\begin{aligned}\{0\} &\longrightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{G}} \longrightarrow \{0\}, \\ \text{et } \{0\} &\longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \{0\}.\end{aligned}$$

En outre, les espaces  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ ,  $\mathfrak{G}$  et  $\tilde{\mathfrak{G}}$  sont des complexes dont l'opérateur cobord est induit par le cobord de Hochschild. La version topologique du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg entraîne que l'algèbre de Schouten  $\mathfrak{g}$  est la cohomologie de  $\mathfrak{G}$ . Nous montrerons que  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  est la cohomologie de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et que  $\tilde{\mathfrak{g}}$  est la cohomologie de  $\tilde{\mathfrak{G}}$ .

- Dans la Section 3, nous montrerons l’existence d’une structure de Gerstenhaber à homotopie près ( $G_\infty$ -algèbre) sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  (nous rappellerons aussi les principales définitions des structures “à homotopie près”).
- Dans la Section 4, en utilisant le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg de la Section 2, nous montrerons que les obstructions à la construction de morphismes de Gerstenhaber à homotopie près (morphisme  $G_\infty$ ) entre  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  sont données par des groupes de cohomologie de  $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^{\otimes \cdot} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$
- Dans la Section 5, nous montrerons que l’existence de tels morphismes  $G_\infty$  entre  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  implique l’existence de star-représentation. Plus précisément, si on se donne un champ de tenseurs de Poisson compatible, on peut construire un star-produit défini par des cochaînes compatibles et donc  $\mathcal{I}[[h]]$  sera un idéal à gauche dans  $(\mathcal{A}[[h]], *)$ .
- Enfin, dans la Section 6, nous expliciterons certains groupes de cohomologie de  $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^{\otimes \cdot} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$  (dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$  et  $C = \mathbb{R}^{n-\nu}$ ). Nous conjecturons que ceux-ci sont nuls dans le cas  $p = n - 1$ , comme le laissent supposer des calculs en petite dimension. Ceci prouverait l’existence de star-représentations dans le cas  $X = \mathbb{R}^n$  et  $C = \mathbb{R}^{n-1}$  et ensuite dans le cas général d’une variété de codimension 1 en utilisant un procédé de globalisation ‘à la Dolgushev-Fedosov’ [5].
- Finalement, nous discuterons des obstructions possibles qui apparaissent dans le cas symplectique comme des classes caractéristiques d’Atiyah-Molino des feuilletages [2].

**Notations :** Pour deux variétés différentiables  $X$  et  $X'$ ,  $\mathcal{C}^\infty(X, X')$  désigne l’ensemble de toutes les applications de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $X$  dans  $X'$ . Pour un fibré vectoriel  $E$  sur une variété différentiable  $X$ , on écrira  $\Gamma(X, E)$  pour l’espace de toutes les sections de classe  $\mathcal{C}^\infty$  du fibré  $E$ .

**Remerciements :** Nous remercions EUCOR pour des aides financières qui ont rendu possible ce travail entre Freiburg, Strasbourg et Mulhouse.

## 2 Théorèmes de Hochschild-Kostant-Rosenberg

Dans cette section nous allons montrer un analogue du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$  et  $C = \mathbb{R}^{n-\nu}$ . Dans les deux premières sous-sections nous rappellerons les propriétés algébriques de  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , et  $\tilde{\mathfrak{G}}$ , puis de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Puis dans la troisième nous donnerons des homotopies explicites entre les résolutions bar et de Koszul qui nous permettront de prouver notre résultat principal dans la quatrième sous-section.

## 2.1 Propriétés algébriques de $\mathfrak{G}$ , $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ et $\tilde{\mathfrak{G}}$

Rappelons quelques opérations définies sur l'espace des cochaînes de Gerstenhaber : pour  $k \leq 1, l$  entiers,  $\phi \in \mathfrak{G}^k$ ,  $\psi \in \mathfrak{G}^l$  et  $1 \leq i \leq k$  on pose

$$\begin{aligned} (\phi \circ_i \psi)(f_1, \dots, f_{k+l-1}) \\ = \phi(f_1, \dots, f_{i-1}, \psi(f_i, \dots, f_{l+i-1}), f_{l+i}, \dots, f_{k+l-1}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

et l'on définit

$$\phi \circ \psi = \sum_{i=1}^k (-1)^{(i-1)(l-1)} \phi \circ_i \psi,$$

(on pose  $\phi \circ \psi = 0$  lorsque  $\phi \in \mathfrak{G}^k$ ,  $k \leq 0$ ), et le *crochet de Gerstenhaber* :

$$[\phi, \psi]_G = \phi \circ \psi - (-1)^{(k-1)(l-1)} \psi \circ \phi.$$

Gerstenhaber a montré [7] que  $(\mathfrak{G}[-1], [\ , \ ]_G)$  est une algèbre de Lie graduée (avec  $(\mathfrak{G}[-1])^k = \mathfrak{G}^{k+1}$ ). Soit  $\mu$  la multiplication point par point dans  $\mathcal{A}$ . On définit alors l'opérateur cobord de Hochschild par :

$$\mathbf{b}\phi = -[\phi, \mu]_G \quad (2.2)$$

Enfin, on définit la multiplication  $\cup$  par :

$$(\phi \cup \psi)(f_1, \dots, f_{k+l}) = \mu(\phi(f_1, \dots, f_k), \psi(f_{k+1}, \dots, f_{k+l}))$$

et il est clair que  $(\mathfrak{G}, \cup)$  est une algèbre associative graduée.

**Proposition 2.1** *L'espace  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  a les propriétés suivantes :*

1.  $\mu \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^2$ .
2.  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  est un idéal à gauche de  $(\mathfrak{G}, \cup)$ .
3.  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[-1]$  est une sous-algèbre de Lie graduée de  $(\mathfrak{G}[-1], [\ , \ ]_G)$ .
4.  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, \mathbf{b})$  est un sous-complex de  $(\mathfrak{G}, \mathbf{b})$ .

Démonstration:

1. C'est évident car  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$ .
2. Soit  $\phi \in \mathfrak{G}^k$ ,  $\psi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^l$  et  $f_{k+l} \in \mathcal{I}$ . On a  $\psi(f_{k+1}, \dots, f_{k+l}) \in \mathcal{I}$  donc  $(\phi \cup \psi)(f_1, \dots, f_{k+l}) \in \mathcal{I}$  car  $\mathcal{I}$  est un idéal de  $\mathcal{A}$ .
3. Soient  $\phi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^k$  et  $\psi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^l$ . Regardons  $\phi \circ_i \psi$  (si  $k \leq 0$  il n'y a rien à montrer) pour  $1 \leq i \leq k$ . Soit  $f_{k+l-1} \in \mathcal{I}$ . Si  $1 \leq i \leq k-1$ , alors  $f_{k+l-1}$  est le dernier argument de  $\phi$ , donc le membre droit de (2.1) appartient à  $\mathcal{I}$  par définition de  $\phi$ , et  $\phi \circ_i \psi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{k+l-1}$ . Si  $i = k$ , alors  $f_{k+l-1}$  est le dernier argument de  $\psi$  et la valeur de  $\psi$  (qui appartient à  $\mathcal{I}$  par définition de  $\psi$ ) est le dernier argument de  $\phi$ . Par définition de  $\phi$ , il vient que sa valeur appartient à  $\mathcal{I}$ , donc  $\phi \circ_k \psi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{k+l-1}$ .

4. C'est une conséquence de 1., 3. et de la définition de  $\mathbf{b}$  (2.2).  $\square$

L'espace  $\tilde{\mathfrak{G}}$  est muni de l'opérateur de Hochschild  $\tilde{\mathbf{b}}$  usuel : soient  $\phi \in \tilde{\mathfrak{G}}^k$ ,  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$  et  $g \in \mathcal{I}$ , alors

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{b}}\phi)(f_1, \dots, f_k)(g) &= f_1 \phi(f_2, \dots, f_k)(g) \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \phi(f_1, \dots, f_r f_{r+1}, \dots, f_k)(g) \\ &+ (-1)^k \phi(f_1, \dots, f_{k-1})(f_k g). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Pour un entier  $k$  considérons les projections canoniques  $\Xi^k : \mathfrak{G}^k \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}^k$  suivantes où  $f_1, \dots, f_{k-1} \in \mathcal{A}$  et  $g \in \mathcal{I}$  :

$$(\Xi^k(\phi))(f_1, \dots, f_{k-1})(g) = i^*(\phi(f_1, \dots, f_{k-1}, g))$$

pour  $k \geq 1$ ,  $\Xi^0 = i^*$  et  $\Xi^k = 0$  quel que soit  $k \leq -1$ .

**Proposition 2.2** *On a les propriétés suivantes :*

1. *Le diagramme suivant est une suite exacte de complexes :*

$$\{0\} \longrightarrow (\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, \mathbf{b}) \longrightarrow (\mathfrak{G}, \mathbf{b}) \xrightarrow{\Xi} (\tilde{\mathfrak{G}}, \tilde{\mathbf{b}}) \longrightarrow \{0\}.$$

*En particulier,  $\tilde{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ .*

2.  *$\tilde{\mathfrak{G}}$  est un module à gauche gradué de  $(\mathfrak{G}, \cup)$ .*

3.  *$\tilde{\mathfrak{G}}[-1]$  est un module de Lie gradué de  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[-1], [\ , \ ]_G)$ .*

Démonstration:

1. Il est clair que le noyau de  $\Xi$  est égal à  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et que  $\Xi$  est surjective. Montrons que  $\Xi$  est un morphisme de complexes : soient  $\phi \in \mathfrak{G}^k$ ,  $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$ ,  $g \in \mathcal{I}$ , on a

$$\begin{aligned} (\Xi^{k+1}(\mathbf{b}\phi))(f_1, \dots, f_k)(g) &= i^*((\mathbf{b}\phi)(f_1, \dots, f_k, g)) \\ &= i^*(f_1 \phi(f_2, \dots, f_k, g)) + (-1)^{k+1} i^*(\phi(f_1, \dots, f_k)g) \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r i^*(\phi(f_1, \dots, f_r f_{r+1}, \dots, f_k, g)) \\ &+ (-1)^k i^*(\phi(f_1, \dots, f_{k-1}, f_k g)) \\ &= i^* f_1 (\Xi^k \phi)(f_2, \dots, f_k)(g) + 0 \text{ (car } i^* g = 0) \\ &+ \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r (\Xi^k \phi)(f_1, \dots, f_r f_{r+1}, \dots, f_k)(g) \\ &+ (-1)^k (\Xi^k \phi)(f_1, \dots, f_{k-1})(f_k g) \\ &= (\tilde{\mathbf{b}} \Xi^k \phi)(f_1, \dots, f_k)(g). \end{aligned}$$

2. C'est une conséquence du fait que  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  est un idéal à gauche de  $\mathfrak{G}$  (Proposition 2.1, 2.).

3. Puisque  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[-1]$  est une sous-algèbre de Lie graduée de  $\mathfrak{G}[-1]$  d'après la Proposition 2.1 3., il vient que  $\mathfrak{G}[-1]$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[-1]$  sont des modules de Lie gradués de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[-1]$ , donc il en est le même pour leur quotient  $\tilde{\mathfrak{G}}[-1]$ .  $\square$

## 2.2 Propriétés algébriques de $\mathfrak{g}$ , $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$

Étudions maintenant les espaces  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Rappelons la définition du crochet de Schouten  $[-, -]_S$  sur  $\mathfrak{G}$  : soient  $f, g \in \mathcal{A}$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $X = X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \in \mathfrak{g}^k$  et  $Y = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_l \in \mathfrak{g}^l$  ( $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_l \in \Gamma(X, TX)$ ), alors le crochet est défini par :

$$\begin{aligned} [fX, gY]_S = & fg \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_k \\ & \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{j-1} \wedge Y_{j+1} \wedge \cdots \wedge Y_l \\ & + f \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} X_i(g) X_1 \wedge \cdots \wedge X_{i-1} \wedge X_{i+1} \wedge \cdots \wedge X_k \wedge Y \\ & + gX \wedge \sum_{j=1}^l (-1)^j Y_j(g) Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{j-1} \wedge Y_{j+1} \wedge \cdots \wedge Y_l. \end{aligned}$$

Il est bien connu que ce crochet ne dépend pas de la décomposition de  $X$  et de  $Y$  en produit de champs de vecteurs. En outre  $(\mathfrak{g}[-1], [-, -]_S)$  est une algèbre de Lie graduée ; de plus,  $(\mathfrak{g}, \wedge)$  est une algèbre associative commutative graduée. Enfin, pour tous  $X \in \mathfrak{g}^k$ ,  $Y \in \mathfrak{g}^l$ ,  $Z \in \mathfrak{g}^l$ , on a la règle de dérivation :

$$[X, Y \wedge Z]_S = [X, Y]_S \wedge Z + (-1)^{(k-1)l} Y \wedge [X, Z]_S$$

et donc  $(\mathfrak{g}, [-, -]_S, \wedge)$  est une algèbre de Gerstenhaber.

Le produit intérieur  $i$  peut s'étendre en une action (toujours notée  $i$ ) de  $(\mathfrak{g}, \wedge)$  sur l'espace  $\Gamma(X, \Lambda T^*X)$  : soit  $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \in \mathfrak{g}^k$ ,  $f \in \mathcal{A}$  et  $\alpha \in \Gamma(X, \Lambda T^*X)$ , alors

$$i(x)\alpha = i(x_1) \cdots i(x_k)\alpha \text{ et } i(f)\alpha = f\alpha.$$

De même, la dérivée de Lie des champs de vecteurs s'étend en une action  $L$  de  $(\mathfrak{g}[-1], [-, -]_S)$  sur  $\Gamma(X, \Lambda T^*X)$  définie par

$$L(x)\alpha = [i(x), d]\alpha. \quad (2.4)$$

Par récurrence sur le degré de  $y$ , on montre aisément que

$$[L(x), i(y)] = i([x, y]), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (2.5)$$



Enfin, puisque  $d^2 = 0$  on a

$$[L(x), d] = 0 \text{ et } [L(x), L(y)] = L([x, y]), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Considérons maintenant les applications  $\Psi^0 = i^* : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathcal{B}$  et pour  $k \geq 1$ ,  $\Psi^k : \mathfrak{g}^k \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}^k$  définie par

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_k \mapsto (c \mapsto (x_1 \bmod T_c C) \wedge \cdots \wedge (x_k \bmod T_c C)).$$

**Proposition 2.3** *La suite d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$*

$$\{0\} \longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k \longrightarrow \mathfrak{g}^k \xrightarrow{\Psi^k} \widetilde{\mathfrak{g}}^k \longrightarrow \{0\} \quad (2.6)$$

*est exacte. En particulier  $\widetilde{\mathfrak{g}}^k \cong \mathfrak{g}^k / \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$ .*

Démonstration: Il est clair que  $\Psi^k$  est bien définie. Le cas  $k = 0$  est une conséquence de la suite exacte (1.1).

Montrons la surjectivité de  $\Psi^k$  : soit  $\tilde{Y} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^k$ . Soit  $E \subset T_C X$  un sous-fibré tel que  $T_C X = TC \oplus E$ , soit  $C \subset V \subset E$  un voisinage ouvert de la section nulle de  $E$ , soit  $C \subset U \subset X$  un voisinage ouvert de  $C$  dans  $X$  et soit  $\Phi : V \rightarrow U$  un difféomorphisme tel que  $\Phi|_C$  est l'application identique (le tout est dit un voisinage tubulaire de  $C$ ).  $E$  est visiblement isomorphe à  $T_C X / TC$ . Pour  $c \in C$  on rappelle le relèvement vertical de  $Y \in E_c$  à  $y \in E_c$  : on a  $Y^{\text{rlvt}_y} = \frac{d}{dt}(y + tY)|_{t=0}$ , donc  $Y^{\text{rlvt}_y} \in T_y E$ . Ceci induit une injection  $(\cdot)^{\text{rlvt}_{\Phi(y)}} : \Lambda^k(T_C X / T_C C) \rightarrow \Lambda^k T_{\Phi(y)} U$ , donc un relèvement vertical des sections  $\tilde{Y} \mapsto Y' = (\tilde{Y})^{\text{rlvt}} \in \Gamma(X, \Lambda^k T U)$  défini par  $Y'_{\Phi(y)} = (\tilde{Y}_c)^{\text{rlvt}_y}$ . Soit  $(\psi_U, 1 - \psi_U)$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert  $(U, X \setminus C)$  de  $X$ . Alors le champ de vecteurs  $Y$  défini par  $Y = \psi_U Y'$  sur  $U$  et  $Y = 0$  sur  $X \setminus U$  est un élément de  $\mathfrak{g}^k$  tel que  $\Psi^k Y = \tilde{Y}$ .

Finalement, montrons que  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$  est égal au noyau de  $\Psi^k$  : pour  $c \in C$  soit  $\Psi_c^k : \Lambda^k T_c X \rightarrow \Lambda^k(T_c X / T_c C)$ . Puisque  $T_c C^{\text{ann}} \cong (T_c X / T_c C)^*$  alors

$$\Lambda^k(T_c C^{\text{ann}}) \cong (\Lambda^k(T_c X / T_c C))^*.$$

Soit  $Y \in \mathfrak{g}^k$ . Alors  $Y \in \text{Ker} \Psi^k$  si et seulement si  $\Psi_c^k(Y_c) = 0$  quel que soit  $c \in C$ . Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \Psi_c^k(Y_c) = 0 &\iff \xi_c(\Psi_c^k(Y_c)) = 0 && \forall \xi_c \in \Lambda^k(T_c X / T_c C)^* \\ &\iff \xi_c(Y_c) = 0 && \forall \xi_c \in \Lambda^k(T_c C)^{\text{ann}} \\ &\iff Y_c(\xi_c) = 0 && \forall \xi_c \in \Lambda^k(T_c C)^{\text{ann}}, \end{aligned}$$

et donc  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k = \text{Ker} \Psi^k$ . □

On obtient alors une autre caractérisation de  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  :

**Proposition 2.4** *Soit  $k$  un entier strictement positif. Un élément  $X \in \mathfrak{g}^k$  appartient à  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$  si et seulement si*

$$i(X)(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) \in \mathcal{I} \text{ quels que soient } g_1, \dots, g_k \in \mathcal{I}$$

Démonstration: Il est clair que  $d_c g \in T_c C^{\text{ann}}$  quel que soit  $c \in C$  et quel que soit  $g \in \mathcal{I}$ , donc la condition ci-dessus est nécessaire.

D'autre part, soit  $\beta \in T_c C^{\text{ann}}$  et soit  $(U, (x^1, \dots, x^{n-\nu}, y^1, \dots, y^\nu))$  une carte de sous-variété de  $C$  autour de  $c$  (c'est-à-dire  $U \cap C = \{u \in U \mid y^1(u) = 0, \dots, y^\nu(u) = 0\}$ ). Alors on trouve  $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha = \sum_{i=1}^\nu \alpha_i dy^i$ . Soit  $(\psi_U, 1 - \psi_U)$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert  $(U, X \setminus \{c\})$  de  $X$ . On définit  $g = \psi_U \sum_{i=1}^\nu \alpha_i y^i$  sur  $U$  et  $g = 0$  sur  $X \setminus U$ . Visiblement  $g \in \mathcal{I}$  et  $d_c g = \alpha$ . Alors tout élément de  $T_c C^{\text{ann}}$  se représente comme  $d_c g$  pour un  $g \in \mathcal{I}$ , d'où la suffisance de la condition.  $\square$

**Proposition 2.5** *L'espace  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  a les propriétés suivantes :*

1. *Toute structure de Poisson  $P$  sur  $X$  compatible avec  $C$  est dans  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^2$ .*
2.  *$(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, \wedge)$  est un idéal de  $(\mathfrak{g}, \wedge)$ .*
3.  *$(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[-1]_b[-, -]_S)$  est une sous-algèbre de Lie graduée de  $(\mathfrak{g}[-1]_b[-, -]_S)$ .*

Démonstration:

1. Ceci est une conséquence directe de la définition (1.2).
2.  $\Psi_c = \sum_{k=0}^n \Psi_c^k : \Lambda T_c X \rightarrow \Lambda(T_c X / T_c C)$  est un homomorphisme d'algèbres de Grassmann, alors  $\Psi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$  aussi, donc le noyau de  $\Psi$ , alors  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ , est un idéal par rapport à la multiplication extérieure  $\wedge$ .
3. Soient  $x \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$  et  $y \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^l$ . Si  $k = l = 0$  alors  $[x, y]_S = 0 \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{-1}$ . Si  $k = 1$  et  $l = 0$ , alors  $y \in \mathcal{I}$  et  $[x, y]_S = x(dy) \in \mathcal{I} = \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^0$  d'après la proposition 2.4. On peut supposer que  $k + l \geq 2$ . Soient  $g_1, \dots, g_{k+l-1} \in \mathcal{I}$  et  $\gamma = dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l-1}$ . Puisque  $x \wedge y \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{k+l}$ , alors  $i(x)i(y)\gamma = 0$ . De plus,  $d\gamma = 0$ . Il s'ensuit, d'après l'équation (2.5), que  $i([x, y])\gamma = [L(x), i(y)]\gamma = i(x)di(y)\gamma + (-1)^{kl}i(y)di(x)\gamma$ . La  $k-1$  forme  $i(y)\gamma$  est une somme finie d'expressions de la forme :  $\pm(i(y)\gamma')\gamma''$  où  $\gamma'$  est une  $l$ -forme constituée de  $l$  éléments parmi  $dg_1, \dots, dg_{k+l-1}$  et  $\gamma''$  est le reste. D'après la proposition 2.4 la fonction  $g' = \pm i(y)\gamma'$  est dans  $\mathcal{I}$ , alors  $i(x)di(y)\gamma = i(x)(dg' \wedge \gamma'')$  car  $d\gamma'' = 0$  et la  $k$ -forme  $dg' \wedge \gamma''$  est le produit extérieur de  $k$  différentielles d'éléments de l'idéal, donc  $i(x)(dg' \wedge \gamma'') \in \mathcal{I}$ . Le terme  $(-1)^{kl}i(y)di(x)\gamma$  appartient également à  $\mathcal{I}$  par un raisonnement entièrement analogue. Alors  $[x, y]_S \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{k+l-1}$ .  $\square$

**Proposition 2.6** *L'espace  $\tilde{\mathfrak{g}}$  a les propriétés suivantes :*

1.  *$(\tilde{\mathfrak{g}}, \wedge)$  est une algèbre commutative associative graduée.*
2.  *$(\tilde{\mathfrak{g}}, \wedge)$  est un module à gauche gradué de  $(\mathfrak{g}, \wedge)$ .*

3.  $\tilde{\mathfrak{g}}[-1]$  est un module d'algèbre de Lie graduée pour  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[-1], [-, -]_S)$ .  
De plus, on a

$$X.(\alpha \wedge \beta) = (X.\alpha) \wedge \beta + (-1)^{(k-1)l} \alpha \wedge (X.\beta)$$

quels que soient  $X \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k, \alpha \in \tilde{\mathfrak{g}}^l, \beta \in \tilde{\mathfrak{g}}$ .

Démonstration:

1. Ceci est évident.
2. Puisque  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  est un idéal de  $(\mathfrak{g}, \wedge)$  et  $\tilde{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ , l'énoncé est évident.
3.  $\mathfrak{g}[-1]$  et  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[-1]$  sont évidemment des modules de  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, [\ , \ ]_S)$ , et il en est de même pour le quotient  $\tilde{\mathfrak{g}}[-1]$ .  $\square$

**Remarque 2.1** Soit  $P \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^2$  une structure de Poisson compatible avec  $C$ . Alors à l'aide de l'action de  $P$  l'espace  $\tilde{\mathfrak{g}}$  devient une algèbre associative commutative différentielle graduée. La cohomologie de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  est dite la cohomologie BRST de  $C$  par rapport à  $P$ . Cette cohomologie est munie d'une structure d'algèbre de Poisson.

## 2.3 Simplification du complexe bar

Dans ce paragraphe  $X = \mathbb{R}^n$ .

Commençons par rappeler la résolution 'topologique' bar de l'algèbre  $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  : Soit  $\mathcal{A}^e = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  et pour tout entier positif  $k$

$$CH^k = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{(k+2)n}, \mathbb{R}).$$

Nous noterons  $(a, x_1, \dots, x_k, b)$  (où  $a, x_1, \dots, x_k, b \in \mathbb{R}^n$ ) pour un point de  $\mathbb{R}^{(k+2)n}$ . L'espace  $CH^k$  est un  $\mathcal{A}^e$ -module :

$$\mathcal{A}^e \times CH^k \rightarrow CH^k : (f, F) \mapsto ((a, x_1, \dots, x_k, b) \mapsto f(a, b)F(a, x_1, \dots, x_k, b))$$

Pour  $k \geq 1$ , rappelons que l'opérateur bord de Hochschild  $\partial_H^k : CH^k \rightarrow CH^{k-1}$  est défini par

$$\begin{aligned} (\partial_H^k F)(a, x_1, \dots, x_{k-1}, b) &= F(a, a, x_1, \dots, x_{k-1}, b) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r F(a, x_1, \dots, x_r, x_r, \dots, x_{k-1}, b) \\ &\quad + (-1)^k F(a, x_1, \dots, x_{k-1}, b, b) \end{aligned}$$

Il est clair que  $\partial_H^k$  est un morphisme de  $\mathcal{A}^e$ -modules et  $\partial_H^k \partial_H^{k+1} = 0$ . L'augmentation  $\epsilon : CH^0 = \mathcal{A}^e \rightarrow \mathcal{A}$  est définie par

$$(\epsilon F)(a) = F(a, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Il est bien connu que le complexe bar

$$\{0\} \longleftarrow \mathcal{A} \xleftarrow{\epsilon} CH^0 \xleftarrow{\partial_H^1} CH^1 \xleftarrow{\partial_H^2} CH^2 \xleftarrow{\partial_H^3} \dots \xleftarrow{\partial_H^k} CH^k \xleftarrow{\partial_H^{k+1}} \dots \quad (2.8)$$

est acyclique : en fait, soit  $h_H^{-1} : \mathcal{A} \rightarrow CH^0$  la prolongation  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$(h_H^{-1}f)(a, b) = f(a, a)$$

et, pour  $k \geq 0$ ,  $h_H^k : CH^k \rightarrow CH^{k+1}$  l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$(h_H^k F)(a, x_1, \dots, x_{k+1}, b) = (-1)^{k+1} F(a, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}).$$

En écrivant  $\text{id}_H^{-1}$  pour l'application identique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $\text{id}_H^k$  pour l'application identique  $CH^k \rightarrow CH^k$  on montre que

$$\begin{aligned} \epsilon h_H^{-1} &= \text{id}_H^{-1} \\ h_H^{-1} \epsilon + \partial_H^1 h_H^0 &= \text{id}_H^0 \\ h_H^{k-1} \partial_H^k + \partial_H^{k+1} h_H^k &= \text{id}_H^k \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

ce qui entraîne l'acyclicité du complexe bar (2.8).

Nous allons maintenant définir un autre complexe (de Koszul) acyclique pour  $\mathcal{A}$  en tant que  $\mathcal{A}^e$ -module : soit  $E = \mathbb{R}^n$

$$CK^k = \mathcal{A}^e \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k E^* \quad \text{quel que soit } k \in \mathbb{Z}.$$

Évidemment, chaque  $CK^k$  est un  $\mathcal{A}^e$ -module libre. Soit  $\xi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow E$  défini par

$$\xi(a, b) = a - b$$

Pour tout entier  $k$  strictement positif, on définit l'opérateur bord de Koszul  $\partial_K^k : CK^k \rightarrow CK^{k-1}$  par

$$\partial_K^k \omega = i(\xi) \omega \quad \text{quel que soit } \omega \in CK^k.$$

Autrement dit, pour  $e_1, \dots, e_k \in E$  et  $a, b \in \mathbb{R}^n$  on a

$$(\partial_K^k \omega)(a, b)(e_2, \dots, e_k) = \omega(a, b)(a - b, e_2, \dots, e_k).$$

Il est clair que les  $\partial_K^k$  sont des morphismes de  $\mathcal{A}^e$ -modules et que  $\partial_K^k \partial_K^{k+1} = 0$  quel que soit l'entier strictement positif  $k$ . Soit  $\epsilon : CK^0 = \mathcal{A}^e \rightarrow \mathcal{A}$  l'augmentation définie comme dans (2.7). Il en résulte le complexe de Koszul :

$$\{0\} \longleftarrow \mathcal{A} \xleftarrow{\epsilon} CK^0 \xleftarrow{\partial_K^1} CK^1 \xleftarrow{\partial_K^2} CK^2 \xleftarrow{\partial_K^3} \dots \xleftarrow{\partial_K^k} CK^k \xleftarrow{\partial_K^{k+1}} \dots \quad (2.9)$$

Ce complexe est acyclique : en effet, soit  $h_K^{-1} = h_H^{-1} : \mathcal{A} \rightarrow CK^0 = \mathcal{A}^e = CH^0$  la prolongation  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$(h_K^{-1}f)(a, b) = f(a, a).$$

Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $E$  et  $e^1, \dots, e^n$  la base duale de  $E^*$ . Pour  $k \geq 0$  soit  $h_K^k : CK^k \rightarrow CK^{k+1}$  l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$(h_K^k \omega)(a, b) = - \sum_{j=1}^n e^j \wedge \int_0^1 dt \, t^k \frac{\partial \omega}{\partial b^j}(a, tb + (1-t)a).$$

En écrivant  $\text{id}_K^{-1}$  pour l'application identique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  et  $\text{id}_K^k$  pour l'application identique  $CK^k \rightarrow CK^k$  on montre que

$$\begin{aligned} \epsilon h_K^{-1} &= \text{id}_K^{-1} \\ h_K^{-1} \epsilon + \partial_K^1 h_K^0 &= \text{id}_K^0 \\ h_K^{k-1} \partial_K^k + \partial_K^{k+1} h_K^k &= \text{id}_K^k \quad \forall k \geq 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

ce qui entraîne l'acyclicité du complexe de Koszul (2.9).

Définissons enfin les applications  $F^k : CK^k \rightarrow CH^k$  par  $F^0 = \text{id}_H^0 = \text{id}_K^0$  et pour tout  $\omega \in CK^k$  :

$$(F^k \omega)(a, x_1, \dots, x_k, b) = \omega(a, b)(x_1 - a, \dots, x_k - a)$$

quels que soient  $k \in \mathbb{Z}$  avec  $k \geq 1$  et  $a, x_1, \dots, x_k, b \in \mathbb{R}^n$ . Il est clair que les  $F^k$  sont des morphismes de  $\mathcal{A}^e$ -modules, et on montre qu'ils sont des morphismes de complexes, c'est-à-dire, quel que soit  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$F^k \partial_K^{k+1} = \partial_H^{k+1} F^{k+1}.$$

Il existe également des applications  $G^k : CH^k \rightarrow CK^k$  qui sont des morphismes de  $\mathcal{A}^e$ -modules et des morphismes de complexes : on définit  $G^0 = \text{id}_H^0 = \text{id}_K^0$  et pour tout  $F \in CH^k$  :

$$\begin{aligned} (G^k F)(a, b) &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \\ &\quad \frac{\partial^k F}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}(a, t_1 a + (1-t_1)b, \dots, t_k a + (1-t_k)b, b) \end{aligned} \quad (2.11)$$

pour tout entier  $k \geq 1$ . Il est évident que chaque  $G^k$  est un homomorphisme de  $\mathcal{A}^e$ -modules, et à l'aide d'un calcul long mais direct on montre que quel que soit  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$G^k \partial_H^{k+1} = \partial_K^{k+1} G^{k+1}.$$

On peut représenter les deux applications  $(F^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(G^k)_{k \in \mathbb{Z}}$  dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xleftarrow{\partial_H^k} & CH^k & \xleftarrow{\partial_H^{k+1}} & CH^{k+1} & \xleftarrow{\partial_H^{k+2}} & \cdots \\
\cdots & & F^k \uparrow \downarrow G^k & & F^{k+1} \uparrow \downarrow G^{k+1} & & \cdots \\
\cdots & \xleftarrow{\partial_K^k} & CK^k & \xleftarrow{\partial_K^{k+1}} & CK^{k+1} & \xleftarrow{\partial_K^{k+2}} & \cdots
\end{array}$$

**Lemme 2.1** Avec les notations ci-dessus on a :

1.  $G^k F^k = \text{id}_K^k$  quel que soit l'entier positif  $k$ .
2. L'opérateur  $\Theta^k = F^k G^k : CH^k \rightarrow CH^k$  est une projection, c'est-à-dire  $\Theta^k \Theta^k = \Theta^k$  quel que soit l'entier positif  $k$ .

Démonstration: Les deux énoncés sont montrés à l'aide d'un calcul direct.  
□

Nous allons maintenant montrer l'existence d'homotopies  $s_H^k : CH^k \rightarrow CH^{k+1}$  : ce sont des homomorphismes de  $\mathcal{A}^e$ -modules tels que

$$\text{id}_H^k - \Theta^k = \partial_H^{k+1} s_H^k + s_H^{k-1} \partial_H^k \quad (2.12)$$

où  $s_H^{-1} = 0$  et  $s_H^0 = 0$ . Ceci se représente de la façon suivante :

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \xleftarrow{\partial_H^{k-1}} & CH^{k-1} & \xleftarrow{\partial_H^k} & CH^k & \xleftarrow{\partial_H^{k+1}} & CH^{k+1} & \xleftarrow{\partial_H^{k+2}} & \cdots \\
\cdots & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \cdots \\
\cdots & s_H^{k-2} & \text{id}_H^{k-1} - \Theta^{k-1} & s_H^{k-1} & \text{id}_H^k - \Theta^k & s_H^k & \text{id}_H^{k+1} - \Theta^{k+1} & s_H^{k+1} & \cdots \\
\cdots & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \cdots \\
\cdots & \xleftarrow{\partial_H^{k-1}} & CH^{k-1} & \xleftarrow{\partial_H^k} & CH^k & \xleftarrow{\partial_H^{k+1}} & CH^{k+1} & \xleftarrow{\partial_H^{k+2}} & \cdots
\end{array}$$

Puisque  $\text{id}_H^0 - \Theta^0 = 0$  et  $(\text{id}_H^k - \Theta^k) \partial_H^{k+1} = \partial_H^{k+1} (\text{id}_H^{k+1} - \Theta^{k+1})$  on a  $\partial_H^1 (\text{id}_H^1 - \Theta^1) = 0$ . On construit  $s_H^1$  "sur les générateurs" de la manière suivante : soit  $F \in CH^1$ . On considère  $\tilde{F}$  dans  $\tilde{CH}^1 = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{5n}, \mathbb{R})$  comme  $\tilde{F}(a', a, x, b, b') = F(a', x, b')$ . On prolonge  $h_H^1$  et  $\text{id}_H^1 - \Theta^1$  de  $CH^1$  à tout élément  $T$  de  $\tilde{CH}^1$  par  $(h_H^1 T)(a', a, x_1, x_2, b, b') = T(a', a, x_1, x_2, b')$  ("les variables  $a', b'$  ne sont pas affectées") et on fait de même avec  $\text{id}_H^1 - \Theta^1$ . Ensuite on définit

$$(s_H^1 F)(a, x_1, x_2, b) = (h_H^1 (\text{id}_H^1 - \Theta^1) \tilde{F})(a', a, x_1, x_2, b, b')|_{a'=a, b'=b}.$$

Par construction,  $s_H^1$  est un homomorphisme de  $\mathcal{A}^e$ -modules. À l'aide de (2.10) on voit que

$$\text{id}_H^1 - \Theta^1 = \partial_H^2 s_H^1.$$

On continue par récurrence : soient  $0 = s_H^0, s_H^1, \dots, s_H^k$  déjà construits tels que (2.12) soit satisfaite jusqu'à l'ordre  $k$ . Alors on a

$$\partial_H^{k+1} (\text{id}_H^{k+1} - \Theta^{k+1} - s_H^k \partial_H^{k+1}) = 0,$$

et l'expression suivante (pour  $F \in CH^{k+1}$ )

$$(s_H^{k+1}F)(a, x_1, \dots, x_{k+2}, b) = \\ (h_H^{k+1}(id_H^{k+1} - \Theta^{k+1} - s_H^k \partial_H^{k+1})\tilde{F})(a', a, x_1, \dots, x_{k+2}, b, b')|_{a'=a, b'=b}.$$

est bien définie. On a alors montré le

**Lemme 2.2** *On peut construire des homotopies  $s_H^k : CH^k \rightarrow CH^{k+1}$  quel que soit l'entier positif  $k$  telles que*

1. *Toute  $s_H^k$  est un homomorphisme de  $\mathcal{A}^e$ -modules.*
2. *Toute  $s_H^k$  est construite par une 'suite d'opérations qui consistent en des intégrales, des dérivées et des évaluations'.*
3.  $s_H^0 = 0$ .
4.  $id_H^k - \Theta^k = \partial_H^{k+1} s_H^k + s_H^{k-1} \partial_H^k$  quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ .

## 2.4 Calcul de la cohomologie

On considère toujours le cas  $X = \mathbb{R}^n$ . Soient  $x = (x^1, \dots, x^n)$  les coordonnées canoniques de  $X$  et on va écrire  $x'$  pour  $(x^1, \dots, x^{n-\nu})$  et  $x''$  pour  $x^{n-\nu+1}, \dots, x^n$ . On note  $x = (x', x'')$ . Soit

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x'' = 0\}.$$

Soit  $g \in \mathcal{I}$ , alors  $g(x', 0) = 0$ . On définit les fonctions  $g_j$  telles que :

$$g(x', x'') = g(x', x'') - g(x', 0) = \\ \sum_{j=1}^l x''^j \int_0^1 dt \frac{\partial g}{\partial x''^j}(x', tx'') = \sum_{j=1}^l x''^j g_j(x', x'')$$

et  $\mathcal{I}$  est un  $\mathcal{A}$ -module de  $l$  générateurs. Il est clair que  $\mathcal{A}, \mathcal{I}$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{I}$  sont des  $\mathcal{A}^e$ -modules : soient  $F \in \mathcal{A}^e$ ,  $f \in \mathcal{A}$ ,  $g \in \mathcal{I}$  et  $h \in \mathcal{B} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-\nu}, \mathbb{R})$ , on pose alors

$$\begin{aligned} (Ff)(x) &= F(x, x)f(x) \\ (Fg)(x) &= F(x, x)g(x) \\ (Fh)(x') &= F((x', 0), (x', 0))h(x'). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit,  $\mathcal{C}$  désignera le  $\mathcal{A}^e$ -module  $\mathcal{A}, \mathcal{I}$  ou  $\mathcal{B}$ , et  $\mathcal{M}$  désignera  $\mathcal{C}$  ou  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ . On peut munir  $\mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$  d'une structure de  $\mathcal{A}^e$ -module : soit  $F \in \mathcal{A}^e$ ,  $\varphi \in \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$  et  $g \in \mathcal{C}$ . Alors,

– dans le cas  $\mathcal{C} = \mathcal{A}$  ou  $\mathcal{C} = \mathcal{I}$  l'application  $\varphi$  est de la forme

$$\varphi(g)(x') = \sum_{r,s=0}^N \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{n-\nu} \sum_{j_1, \dots, j_s=1}^{\nu} \varphi_{r,s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}(x') \\ \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x'^{i_1} \dots \partial x'^{i_r} \partial x''^{j_1} \dots \partial x''^{j_s}}(x', 0)$$

où  $\varphi_{r,s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} \in \mathcal{B}$  et  $g \in \mathcal{C}$ . Pour un  $F \in \mathcal{A}^e$  on définit alors

$$\begin{aligned} ((F\varphi)(g))(x') &= \sum_{r,s=0}^N \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{n-\nu} \sum_{j_1, \dots, j_s=1}^{\nu} \varphi_{r,s}^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}(x') \\ &\quad \frac{\partial^{r+s}(F((a', 0), (x', x''))g(x', x''))}{\partial x'^{i_1} \dots \partial x'^{i_r} \partial x''^{j_1} \dots \partial x''^{j_s}}(x', 0) \Big|_{a'=x'}. \end{aligned}$$

– Dans le cas  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ , l'application  $\varphi$  est de la forme

$$\varphi(g)(x') = \sum_r \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^{n-\nu} \varphi_r^{i_1 \dots i_r}(x') \frac{\partial^r g}{\partial x'^{i_1} \dots \partial x'^{i_r}}(x')$$

où  $g, \varphi_r^{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{B}$  et on définit  $F\varphi$  comme précédemment.

Soit  $\phi \in \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ . Pour un multi-indice  $I \in \mathbb{N}^n$ ,  $I = (p_1, \dots, p_n)$ , on définit l'opérateur des dérivées successives suivant (où  $|I| = p_1 + \dots + p_n$ ) :

$$\partial_{x^I} = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^{1p_1} \dots \partial x^{np_n}}.$$

Alors  $\phi$  est de la forme générale suivante :

– pour  $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M} = \mathcal{I}$

$$\phi(f_1, \dots, f_k)(x) = \sum_{|I_1|, \dots, |I_k| \leq N} \phi^{I_1 \dots I_r}(x) (\partial_{x^{I_1}} f_1)(x) \dots (\partial_{x^{I_k}} f_k)(x)$$

où  $\phi^{I_1 \dots I_r}$  appartient à  $\mathcal{A}$  ou à  $\mathcal{I}$ .

– Si  $\mathcal{M} = \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ , l'opérateur  $\phi$  est de la forme

$$\begin{aligned} (\phi(f_1, \dots, f_k)(g))(x') &= \sum_{|I_1|, \dots, |I_k|, |J| \leq N} \phi^{I_1 \dots I_r J}(x') \\ &\quad (\partial_{x^{I_1}} f_1)(x') \dots (\partial_{x^{I_k}} f_k)(x') (\partial_{x^J} g)(x') \end{aligned}$$

où  $\phi^{I_1 \dots I_r J} \in \mathcal{B}$  et  $g \in \mathcal{C}$ .

Dans tous ces cas  $\phi$  se prolonge de façon naturelle en un homomorphisme de  $\mathcal{A}^e$ -modules  $CH^k \rightarrow \mathcal{M}$  par  $(F \in CH^k)$

– si  $\mathcal{M} = \mathcal{A}$  et  $\mathcal{M} = \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} \phi(F)(x) &= \sum_{|I_1|, \dots, |I_k| \leq N} \phi^{I_1 \dots I_r}(x) \\ &\quad \left( \partial_{x_1^{I_1}} \dots \partial_{x_k^{I_k}} F(a, x_1, \dots, x_k, b) \right) \Big|_{a=x_1=\dots=x_k=b=x}, \end{aligned}$$



– et si  $\mathcal{M} = \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$

$$(\phi(F)(g))(x) : \sum_{|I_1|, \dots, |I_k|, |J| \leq N} \phi^{I_1 \dots I_r J}(x') \\ \partial_{x_1^{I_1}} \dots \partial_{x_k^{I_k}} \partial_{b^J} (F(a, x_1, \dots, x_k, b)g(b)) \Big|_{a=x_1=\dots=x_k=b=x'}.$$

**Lemme 2.3** Soit  $\phi \in \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  (avec  $\mathcal{M} = \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{M} = \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$  et  $\mathcal{C} = \mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{B}$ ). On désigne toujours par le même symbole  $\phi$  son prolongement à  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^e}(CH^k, \mathcal{M})$ . Soit  $\theta^k \phi : \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$  défini par

- $(\theta^k \phi)(f_1, \dots, f_k) = \phi(\Theta^k(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_k \otimes 1))$  si  $\mathcal{M} = \mathcal{C}$ ,
- $((\theta^k \phi)(f_1, \dots, f_k))(g) = \phi(\Theta^k(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_k \otimes 1))(g)$  si  $\mathcal{M} = \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ .

Alors  $\theta^k \phi \in \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ .

Démonstration: Bien que  $\Theta^k$  contienne des intégrales (voir le lemme 2.1 et l'équation (2.11)), l'évaluation  $a = x_1 = \dots = x_k = b = x'$  fait disparaître les arguments  $t_1, \dots, t_k$  dans les dérivées des fonctions  $f_1, \dots, f_k$ , donc les intégrales se résolvent et donnent des nombres rationnels, et des dérivées partielles restent.  $\square$

De la même façon on montre la

**Proposition 2.7** Soit  $\phi \in \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  où  $\mathcal{M} = \mathcal{C}$  ou  $\mathcal{M} = \mathbf{D}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ . Alors

1.  $(b\phi)(f_1, \dots, f_{k+1}) = \phi(\partial_H^{k+1}(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_{k+1} \otimes 1))$  est égal à l'opérateur cobord de Hochschild :

$$(b\phi)(f_1, \dots, f_{k+1}) = f_1 \phi(f_2, \dots, f_k) \\ + \sum_{r=1}^k (-1)^r \phi(f_1, \dots, f_r f_{r+1}, \dots, f_{k+1}) \\ + (-1)^{k+1} \phi(f_1, \dots, f_k) f_{k+1}.$$

2. Soit  $S^k : \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathbf{D}^{k-1}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$  définie par

$$(S^k \phi)(f_1, \dots, f_{k-1}) = \phi(s_H^{k-1}(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_{k-1})).$$

Alors  $S^k$  est bien définie et l'on a

$$\text{id}^k - \theta^k = bS^k + S^{k+1}b.$$

À l'aide de résultats classiques en algèbre homologique, on obtient le

**Corollaire 2.1** La cohomologie des complexes  $((\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}))_{k \in \mathbb{Z}}, b)$  est isomorphe à la cohomologie du sous-complexe  $((\theta^k \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathcal{M}))_{k \in \mathbb{Z}}, b)$ .

**Lemme 2.4** La suite exacte de  $A^e$ -modules

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \{0\}$$

entraîne la suite exacte de  $A^e$ -modules

$$\{0\} \longleftarrow \mathbf{D}(\mathcal{I}, \mathcal{B}) \longleftarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longleftarrow \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) \longleftarrow \{0\}$$

et finalement, la suite exacte de complexes

$$\{0\} \longleftarrow \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{I}, \mathcal{B})) \longleftarrow \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \longleftarrow \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \longleftarrow \{0\}$$

Démonstration: Il est clair qu'un opérateur différentiel de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  s'annule sur  $\mathcal{I}$  si et seulement s'il ne contient que des dérivées partielles des variables  $x'$ , et est donc une prolongation d'un opérateur différentiel de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{B}$ .  $\square$

Soit  $SE$  l'algèbre symétrique sur l'espace vectoriel  $E$ . Sur l'espace vectoriel gradué  $SE \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda E = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} SE \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k E$  on a un opérateur cobord de Koszul  $\delta_K$  : soit  $e_1, \dots, e_n$  une base de  $E$  et  $e^1, \dots, e^n$  la base duale. Alors

$$\delta_K(L \otimes T) = \sum_{j=1}^n i(e^j) L \otimes e_j \wedge T \quad (2.13)$$

où  $i(e^j)$  est le produit intérieur symétrique qui correspond à la dérivée partielle dans la direction  $e^j$  si l'on interprète  $SE$  en tant qu'algèbre de polynômes sur  $E^*$ .

**Lemme 2.5** *Le complexe  $(SE \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda E, \delta_K)$  est acyclique.*

Soit  $\text{Che} : \mathcal{B} \otimes_{\mathbb{R}} SE \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  la bijection ('de quantification par l'ordre standard') suivante : pour  $h \in \mathcal{B}$  et  $I = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$

$$h \otimes (e_1)^{p_1} \dots (e_n)^{p_n} \mapsto h \partial_{b^I}. \quad (2.14)$$

Pour simplifier les notations, on posera  $\hat{a} = \text{Che}(a)$ . Soit  $E_1 = \mathbb{R}^{n-\nu}$  et  $E_2 = \mathbb{R}^{\nu}$ . On a

$$SE \otimes \Lambda E \cong (SE_1 \otimes \Lambda E_1) \otimes (SE_2 \otimes \Lambda E_2)$$

et l'on a une bijection, comme celle définie en (2.14) entre  $\mathcal{B} \otimes_{\mathbb{R}} SE_1$  et  $\mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ .

Le théorème suivant simplifie le calcul de la cohomologie des complexes  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et  $\tilde{\mathfrak{G}}$  :

**Théorème 2.1** *Les applications  $\mathbb{R}$ -linéaires suivantes :*

1.  $\chi^k : (\mathcal{B} \otimes_{\mathbb{R}} SE \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k E, \delta_K) \rightarrow (\theta^k \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})), \mathbf{b})$  avec

$$\begin{aligned} \chi^k(h \otimes L \otimes T)(f_1, \dots, f_k)(g)(x') = \\ (-1)^{k+1} h(x') i(T) \hat{L}[b] \left( G^k(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_k \otimes 1)(a, b) g(b) \right) \Big|_{a=b=x'} \end{aligned}$$

où la notation  $\hat{L}[b]$  indique que les dérivées partielles de  $\hat{L}$  sont par rapport aux variables  $b^1, \dots, b^n$ .

2.  $\chi'^k : (\mathcal{B} \otimes_{\mathbb{R}} SE_1 \otimes_{\mathbb{R}} \oplus_{r=0}^k (\Lambda^r E_2 \otimes \Lambda^{k-r} E_1), (\delta_K)|_{SE_1 \otimes \Lambda E_1}) \rightarrow (\theta^k \mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})), \mathbf{b})$  avec

$$\chi^k(h \otimes L \otimes T)(f_1, \dots, f_k)(g)(x') = (-1)^{k+1} h(x') i(T) \hat{L}[b'] (G^k(1 \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_k \otimes 1)(a, b)g(b)) \Big|_{a=b=x'}$$

induisent des isomorphismes de complexes.

Il en résulte :

**Théorème 2.2** *Les groupes de cohomologie des complexes suivants se simplifient comme suit :*

1.  $H\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \cong \{0\}$  si  $k \geq 1$ .
2.  $H\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \cong \mathcal{B} \otimes \Lambda^k E_2$  quel que soit l'entier  $k$ .
3.  $H\tilde{\mathfrak{G}}^k = H\mathbf{D}^{k-1}(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{I}, \mathcal{B})) \cong H\mathbf{D}^k(\mathcal{A}, \mathbf{D}(\mathcal{B}, \mathcal{B})) \cong \mathcal{B} \otimes \Lambda^k E_2 = \tilde{\mathfrak{g}}^k$  quel que soit l'entier  $k$ .

En utilisant la suite exacte longue de cohomologie résultant de la suite exacte courte des complexes  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}$  et le fait que l'homomorphisme connectant s'annule, on obtient finalement le résultat souhaité :

**Théorème 2.3** *Quel que soit l'entier  $k$  :*

1.  $H\mathfrak{G}^k \cong \mathcal{A} \otimes \Lambda^k E = \mathfrak{g}$ .
2.  $H\tilde{\mathfrak{G}}^k \cong \mathcal{B} \otimes \Lambda^k E_2 = \tilde{\mathfrak{g}}^k$ .
3.  $H\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^k \cong \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k$ .

## 2.5 Les applications HKR

Dans cette sous-section nous allons construire des quasi-isomorphismes entre les algèbres de Lie différentielles graduées  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, \mathbf{b})$  et  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, 0)$ . Nous verrons que l'application HKR usuelle correspondant à l'antisymétrisation ne convient pas et doit être modifiée.

Pour un entier positif  $k$  soit  $\alpha^k : \Lambda^k E \rightarrow E^{\otimes k}$  l'application d'antisymétrisation usuelle :  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$ . Soit aussi  $P^1 : SE \rightarrow E$  la projection canonique. En utilisant le fait que  $\mathfrak{G}^k \cong \mathcal{A} \otimes (SE)^{\otimes k}$  (à l'aide de l'application (2.14)) nous définissons les deux applications suivantes

$$\psi_{HKR}^k : \mathfrak{g}^k \rightarrow \mathfrak{G}^k : f \otimes T \mapsto f \otimes \alpha^k(T), \quad (2.15)$$

et

$$\pi_{HKR}^k : \mathfrak{G}^k \rightarrow \mathfrak{g}^k : f \otimes L_1 \otimes \dots \otimes L_k \mapsto f \otimes P^1(L_1) \wedge \dots \wedge P^1(L_k). \quad (2.16)$$

Nous écrirons  $\psi_{HKR}$  (resp.  $\pi_{HKR}$ ) pour la somme de tous les  $\psi_{HKR}^k$  (resp.  $\pi_{HKR}^k$ ) où  $\psi_{HKR}^k$  et  $\pi_{HKR}^k$  s'annulent pour  $k \leq -1$  et  $k > \dim E$ . Le théorème de Hochschild, Kostant et Rosenberg (HKR), 2.3, permet de déduire le suivant

**Théorème 2.4** *Quel que soit l'entier positif  $k$ , les applications  $\psi_{HKR}^k$  et  $\pi_{HKR}^k$  ont les propriétés suivantes :*

1.  $\pi_{HKR}^k \psi_{HKR}^k = \text{id}_{\mathfrak{g}^k}$ .
2.  $\mathbf{b}\psi_{HKR}^k = 0$ .
3. Soit  $\phi \in \mathfrak{G}^k$ . Si  $\mathbf{b}\phi = 0$  et  $\pi_{HKR}^k \phi = 0$ , alors  $\phi$  est un cobord, i.e. il existe  $\psi \in \mathfrak{G}^{k-1}$  tel que  $\phi = \mathbf{b}\psi$ .
4. Soient  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , alors il existe  $\phi \in \mathfrak{G}$  tel que  $[\psi_{HKR} X, \psi_{HKR} Y]_G - \psi_{HKR}[X, Y]_S = \mathbf{b}\phi$ .

Malheureusement, l'application HKR  $\psi_{HKR}$  n'envoie pas le sous-espace  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  de  $\mathfrak{g}$  dans le sous-espace  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  de  $\mathfrak{G}$  : en utilisant la décomposition

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} = \mathcal{A} \otimes \Lambda E_2 \otimes \Lambda^+ E_1 \oplus \mathcal{I} \otimes \Lambda E_2 \quad (2.17)$$

on voit que l'image de  $\psi_{HKR}$  contiendrait des éléments provenant du premier terme de la somme ci-dessus dont le facteur le plus à droite est dans  $E_2$  sans que le coefficient soit dans l'idéal, et un tel opérateur multidifférentiel ne serait plus dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ .

Il faut alors modifier les applications  $\alpha^k$  : il est bien connu que la multiplication extérieure induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\Phi : \Lambda E_2 \otimes \Lambda E_1 \rightarrow \Lambda(E_1 \oplus E_2) = \Lambda E : T_2 \otimes T_1 \mapsto T_2 \wedge T_1. \quad (2.18)$$

Soit  $\iota^{(l, k-l)} : E_2^{\otimes l} \otimes E_1^{\otimes (k-l)} \rightarrow E^{\otimes k}$  l'injection induite par des sous-espaces  $E_1, E_2$ . L'application  $\hat{\alpha}^k := \sum_{l=0}^k \iota^{(l, k-l)} \alpha^l \otimes \alpha^{k-l}$  envoie  $(\Lambda E_2 \otimes \Lambda E_1)_k$  dans  $E^{\otimes k}$ . Nous définissons l'application HKR modifiée par

$$\psi_{HKR}^{1k} : \mathfrak{g}^k \rightarrow \mathfrak{G}^k : f \otimes T \mapsto f \otimes \hat{\alpha}^k(\Phi^{-1}(T)), \quad (2.19)$$

et  $\psi_{HKR}^{1k}$  comme étant la somme des tous les  $\psi_{HKR}^{1k}$ . Ainsi le facteur le plus à droite est toujours dans  $E_1$  dans le cas où son coefficient est dans  $\mathcal{A}$ , et n'est dans  $E_2$  que si son coefficient est dans  $\mathcal{I}$ . Par conséquent,  $\psi_{HKR}^{1k}$  envoie bien  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ . En écrivant  $\psi^{[1]}$  pour la restriction de  $\psi_{HKR}^{1k}$  à  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  on a l'analogie suivant du théorème 2.4 :

**Théorème 2.5** *Quel que soit l'entier positif  $k$ , les applications  $\psi^{[1]k}$  et  $\pi_{HKR}^k$  ont les propriétés suivantes :*

1.  $\pi_{HKR}^k \psi^{[1]k} = \text{id}_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^k}$ .
2.  $\mathbf{b}\psi^{[1]k} = 0$ .
3. Soit  $\phi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^k$ . Si  $\mathbf{b}\phi = 0$  et  $\pi_{HKR}^k \phi = 0$ , alors  $\phi$  est un cobord, i.e. il existe  $\psi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{k-1}$  tel que  $\phi = \mathbf{b}\psi$ .
4. Soient  $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ , alors il existe  $\phi \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  tel que  $[\psi^{[1]} X, \psi^{[1]} Y]_G - \psi^{[1]}[X, Y]_S = \mathbf{b}\phi$ .

Démonstration: 1. Le premier énoncé est évident.  
2. Puisque l'image de  $\psi^{[1]}$  consiste en des opérateurs multidifférentiels 1-différentiels, cet espace ne contient que des cocycles, d'où le deuxième énoncé.  
3. D'après le troisième énoncé du théorème 2.4,  $\phi$  est un cobord dans  $\mathfrak{G}$ , mais puisque le morphisme connectant de la suite exacte longue correspondant à la suite exacte courte  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}$  s'annule, il s'ensuit que  $\phi$  est aussi un cobord dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ .  
4. D'après 1. et le premier énoncé de 2.4, on trouve  $\phi_1, \phi_2, \phi' \in \mathfrak{G}$  tels que  $\psi^{[1]}X = \psi_{HKR}X + \mathbf{b}\phi_1$ ,  $\psi^{[1]}Y = \psi_{HKR}Y + \mathbf{b}\phi_2$  et  $\psi^{[1]}[X, Y] = \psi_{HKR}[X, Y] + \mathbf{b}\phi'$ . A l'aide de l'énoncé 4. de 2.4, on voit que le membre de gauche de 4. est un élément de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et un cobord dans  $\mathfrak{G}$ , donc –à l'aide du même argument que pour 3.– un cobord dans  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ .  $\square$

### 3 Structure $G_{\infty}$ sur $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$

Dans cette section, nous allons tout d'abord rappeler les définitions des structures et morphismes  $L_{\infty}$  et  $G_{\infty}$ . Puis, dans la deuxième sous-section, nous rappellerons le plan de la démonstration de la conjecture de Deligne par Tamarkin (il existe une structure  $G_{\infty}$  sur  $\mathfrak{G}$ ) que nous adapterons au cas où l'espace est  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  dans la troisième sous-section pour montrer l'existence d'une structure  $G_{\infty}$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ .

#### 3.1 Rappels et notations

Soit  $\mathfrak{g}$  un espace gradué, nous noterons  $\Lambda^* \mathfrak{g}$  la cogèbre colibre cocommutative sur  $\mathfrak{g}$  et  $\Lambda^* \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes}$  l'espace gradué

$$\bigoplus_{m \geq 1, r_1 + \dots + r_n = m} \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes r_1} \wedge \dots \wedge \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes r_n}$$

où  $\underline{\mathfrak{g}}^{\otimes l}$  désigne le quotient de  $\mathfrak{g}^{\otimes l}$  par l'image des shuffles d'ordre  $l$  (pour plus de détails, voir [13] ou [15] par exemple). On utilise la graduation suivante sur  $\Lambda^* \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes}$  : pour des éléments homogènes  $x_1^1, \dots, x_n^{r_n}$  dans  $\mathfrak{g}$  des degrés respectivement  $|x_1^1|, \dots, |x_n^{r_n}|$ , le degré de  $x = (x_1^1 \otimes \dots \otimes x_1^{r_1}) \wedge \dots \wedge (x_n^1 \otimes \dots \otimes x_n^{r_n})$  est

$$|x| = \sum_{i=1}^{r_1} |x_1^i| + \dots + \sum_{i=1}^{r_n} |x_n^i| - n.$$

Il est bien connu que  $\Lambda^* \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes}$  est une cogèbre colibre.

#### Définition 3.1

- Une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près (ou algèbre  $G_{\infty}$ ) sur un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  est donnée par une famille d'applications de degré 1 :

$$m^{r_1, \dots, r_n} : \mathfrak{g}^{\otimes r_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{g}^{\otimes r_n} \rightarrow \mathfrak{g}$$

telles que leur extension canonique à  $\Lambda \cdot \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes}$  satisfait

$$d \circ d = 0$$

où

$$d = \sum_{m \geq 1} \sum_{r_1 + \dots + r_n = m} m^{r_1, \dots, r_n}.$$

- Une structure d’algèbre de Lie à homotopie près (ou algèbre  $L_\infty$ ) sur un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  est une algèbre  $G_\infty$  où les applications  $m^{r_1, \dots, r_n} : \mathfrak{g}^{\otimes r_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{g}^{\otimes r_n} \rightarrow \mathfrak{g}$  sont nulles pour  $r_i > 1$ .

Considérons l’espace  $\mathfrak{g} = \Gamma(X, \wedge^* TX)$ , la structure d’algèbre de Lie graduée de  $\mathfrak{g}$  donnée par le crochet de Schouten  $[-, -]_S$  peut être retraduite au moyen d’une application

$$m^{1,1} : \Lambda^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

et la structure d’algèbre commutative graduée, donnée par le produit extérieur  $\wedge$ , au moyen d’une application

$$m^2 : \mathfrak{g}^{\otimes 2} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Ces applications peuvent être naturellement étendues en des applications, toujours notées  $m^{1,1}$  and  $m^2$ , sur  $\Lambda \cdot \underline{\mathfrak{g}}^{\otimes}$ . On vérifie aisément que les applications  $m^{1,1}$  et  $d = m^{1,1} + m^2$  vérifient

$$m^{1,1} \circ m^{1,1} = 0 \text{ et } d \circ d = 0$$

de telle sorte que  $(\mathfrak{g}, m^{1,1})$  (resp.  $(\mathfrak{g}, d)$ ) peut être vue comme une algèbre  $L_\infty$  (resp.  $G_\infty$ ). Plus généralement, toute algèbre de Gerstenhaber  $(G, \mu, [, ]) a une structure d’algèbre  $G_\infty$  canonique donnée par  $m^{1,1} = [, ]$ ,  $m^2 = \mu$ , les autres applications étant posées nulles.$

Considérons maintenant le complexe de Hochschild  $\mathfrak{G} = C^\bullet(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  où  $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ , vu comme un espace vectoriel gradué :  $\mathfrak{G} = \bigoplus_k C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  (un élément de  $C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A})$  est de degré  $k - 1$ ). Équipé de crochet de Gerstenhaber  $[-, -]_G$  et de la différentielle de Hochschild  $b$ , c’est une algèbre de Lie différentielle graduée (est donc une algèbre  $L_\infty$  avec  $M^1 = \mathfrak{b}$  et  $M^{1,1} = [-, -]_G$ ). Deligne([4]) a conjecturé que cet espace  $\mathfrak{G}$  peut aussi être muni d’une structure d’algèbre  $G_\infty$  où  $M^2$  correspondrait au produit commutatif gradué usuel des cochaînes : pour  $E, F \in \mathfrak{G}$  et  $x_1, \dots, x_{|E|+|F|+2} \in A$ ,

$$\begin{aligned} M^2(E, F)(x_1, \dots, x_{|E|+|F|+2}) \\ = (-1)^\gamma E(x_1, \dots, x_{|E|+1}) F(x_{|E|+2}, \dots, x_{|E|+|F|+2}) \end{aligned}$$

où  $\gamma = (|F| + 1)(|E| + 1)$ . Dans la sous-section suivante, nous rappellerons le plan de la preuve de cette conjecture donnée par Tamarkin [16], et qui utilise le foncteur de quantification-déquantification d’Etingof-Kazhdan [6]. Nous montrerons dans la troisième sous-section comment adapter cette preuve pour montrer l’existence d’une structure  $G_\infty$  sur  $\mathfrak{G}_\mathcal{I}$ .

**Définition 3.2** *Un morphisme  $L_\infty$  (respectivement  $G_\infty$ ) entre deux algèbres  $L_\infty$  (respectivement  $G_\infty$ )  $(\mathfrak{g}_1, d_1)$  et  $(\mathfrak{g}_2, d_2)$  est un morphisme*

$$\psi : (\Lambda \cdot \underline{\mathfrak{g}}_1^\otimes, d_1) \rightarrow (\Lambda \cdot \underline{\mathfrak{g}}_2^\otimes, d_2)$$

*de cogèbre codifférentielle.*

Un morphisme  $G_\infty$   $\psi$  entre deux algèbres  $G_\infty$   $(\mathfrak{g}_1, d_1)$  et  $(\mathfrak{g}_2, d_2)$  est donné par une famille d'applications  $\psi^{[n]}$  où

$$\psi^{[n]} = \sum_{r_1 + \dots + r_k = n} \psi^{r_1, \dots, r_k}$$

avec  $\psi^{r_1, \dots, r_k} : \mathfrak{g}_1^{\otimes r_1} \wedge \dots \wedge \mathfrak{g}_1^{\otimes r_k} \rightarrow \mathfrak{g}_2$  et qui satisfont, pour tout  $n$  l'équation :

$$\psi^{[\leq n]} \circ d_1^{[\leq n]} = d_2^{[\leq n]} \circ \psi^{[\leq n]}.$$

Ici, nous avons noté

$$\begin{aligned} \psi^{[\leq n]} &= \sum_{r_1 + \dots + r_k \leq n} \psi^{r_1, \dots, r_k}, \\ d_i^{[\leq n]} &= \sum_{r_1 + \dots + r_k \leq n} d_i^{r_1, \dots, r_k} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

où  $d_i^{r_1, \dots, r_k}$  sont les composantes des codifférentielles  $d_i$  ( $i = 1, 2$ ).

### 3.2 Plan de la preuve de la conjecture de Deligne

Nous allons rappeler le plan de la preuve de la conjecture de Deligne par Tamarkin telle qu'elle est décrite dans [9]. Notre but est de construire une structure  $G_\infty$ , c'est-à-dire, une différentielle  $D$  sur  $\mathfrak{G}$ , puis sur le sous-espace  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , satisfaisant toute les deux, si

$$M = M^1 + M^{1,1} + M^2 + \dots + M^{p_1, \dots, p_n} + \dots,$$

1.  $M^1$  est le cobord de Hochschild  $\mathfrak{b}$  et  $M^{1,1}$  est le crochet  $[-, -]_G$ .
2.  $M \circ M = 0$ .

Dans la suite de cette section,  $\mathfrak{H}$  designera  $\mathfrak{G}$  ou sa sous-algèbre  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ . Le problème peut se reformuler comme suit : Soit  $L = \oplus \mathfrak{H}^{\otimes n}$  la cogèbre de Lie colibre sur  $\mathfrak{H}$ . Puisque  $L$  est une cogèbre de Lie colibre, une structure de bigèbre de Lie différentielle sur  $L$  est donnée par des applications de degré 1,  $l^n : \mathfrak{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{H}$ , correspondant à la différentielle, et par des applications  $l^{p_1, p_2} : \mathfrak{H}^{\otimes p_1} \wedge \mathfrak{H}^{\otimes p_2} \rightarrow \mathfrak{H}$ , correspondant au crochet de Lie. Ces applications s'étendent de manière unique en des dérivations de cogèbre  $L \rightarrow L$  et en un morphisme de cogèbre  $L \wedge L \rightarrow L$  (toujours notés  $l^m$  et  $l^{p,q}$ ). On a immédiatement :

**Lemme 3.1** *Supposons donnée une structure de bigèbre de Lie différentielle sur la cogèbre de Lie  $L$ , dont la différentielle et le crochet de Lie sont déterminés respectivement par les applications  $l^n$  et  $l^{p_1, p_2}$  comme ci-dessus. Alors  $\mathfrak{H}$  a une structure  $G_\infty$  donnée, pour tous  $p, q, n \geq 1$ , par*

$$M^n = l^n, \quad M^{p, q} = l^{p, q} \quad \text{et} \quad M^{p_1, \dots, p_r} = 0 \quad \text{pour } r \geq 3.$$

Démonstration: Voir [9] pour la preuve détaillée.  $\square$

Ainsi, pour obtenir la structure  $G_\infty$  désirée sur  $\mathfrak{H}$ , il est suffisant de définir une structure de bigèbre de Lie différentielle sur  $L$  donnée par des applications  $l^n$  et  $l^{p_1, p_2}$  avec  $l^1 = b$  et  $l^{1,1} = [-, -]_G$ .

Continuons à donner une formulation équivalente de notre problème :

**Proposition 3.1** *Supposons donnée une structure de bigèbre différentielle sur la cogèbre tensorielle colibre  $T = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{H}^{\otimes n}$  dont la différentielle et la multiplication sont données respectivement par des applications  $a^n : \mathfrak{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{H}$  et  $a^{p_1, p_2} : \mathfrak{H}^{\otimes p_1} \otimes \mathfrak{H}^{\otimes p_2} \rightarrow \mathfrak{H}$ . Alors on a une structure de bigèbre de Lie différentielle sur la cogèbre de Lie  $L = \bigoplus_{n \geq 0} \underline{\mathfrak{H}^{\otimes n}}$ , dont la différentielle et le crochet de Lie sont donnés respectivement par les applications  $l^n$  et  $l^{p_1, p_2}$  où  $l^1 = a^1$  et  $l^{1,1}$  est l'anti-symétrisée de  $a^{1,1}$ .*

Démonstration: La preuve utilise le théorème de quantification-déquantification d'Etingof-Kazhdan ([6]). Elle est faite dans [16] et dans [9].  $\square$

Ainsi, définir une structure de bigèbre de Lie différentielle sur  $L$  donnée par des applications  $l^n$  et  $l^{p_1, p_2}$  avec  $l^1 = b$  et  $l^{1,1} = [-, -]_G$ , est équivalent à définir une structure de bigèbre différentielle sur  $T$  donnée par des applications  $a^n : \mathfrak{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{H}$  et  $a^{p_1, p_2} : \mathfrak{H}^{\otimes p_1} \otimes \mathfrak{H}^{\otimes p_2} \rightarrow \mathfrak{H}$  où  $a^1 = b$  et  $a^{1,1}$  est le produit  $\{-|- \}$  défini par

$$\{E|F\}(x_1, \dots, x_{e+f-1}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^{|F| \cdot i} E(x_1, \dots, x_i, F(x_{i+1}, \dots, x_{i+f}), \dots),$$

pour  $E, F$  dans  $\mathfrak{H}$  (il est clair, par définition, que l'anti-symétrisé de  $\{-|- \}$  est le crochet de Gerstenhaber  $[-, -]_G$ ).

Cette dernière structure peut être obtenue, dans le cas où  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$  en utilisant l'opération "brace" (définies dans [11] et [8]) agissant sur le complexe de cochaînes de Hochschild  $\mathfrak{G} = C(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ . Dans la sous-section suivante, nous montrerons que ces opérations peuvent encore être utilisées dans le cas  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , prouvant ainsi l'existence d'une structure d'algèbre  $g_\infty$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ .

### 3.3 Existence d'une structure $G_\infty$ sur $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$

Comme nous l'avons vu précédemment, pour prouver l'existence de la structure d'algèbre  $G_\infty$  désirée sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , nous devons construire une structure de



bigèbre différentielle sur  $T = \oplus_{n \geq 0} \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes n}$  donnée par des applications  $a^n : \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et  $a^{p_1, p_2} : \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_1} \otimes \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_2} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  où  $a^1 = \mathbf{b}$  et  $a^{1,1}$  est le produit  $\{-|\cdot\}$  défini dans la section précédente. Pour cela nous allons encore utiliser les opérations braces qui se restreignent à  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  puisque  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  vérifie les propriétés de la proposition 2.1. Ces opérations sont des applications :  $a^{1,p} : \mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \otimes \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes p} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  ( $p \geq 1$ ) définies pour toutes cochaînes homogènes  $E, F_1, \dots, F_p \in \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes p+1}$  et  $x_1, \dots, x_e \in A$  (avec  $e = |E| + |F_1| + \dots + |F_p| + 1$ ), par

$$\begin{aligned} a^{1,p}(E_1 \otimes (F_1 \otimes \dots \otimes F_p))(x_1 \otimes \dots \otimes x_e) \\ = \sum (-1)^\tau E(x_1, \dots, x_{i_1}, F_1(x_{i_1+1}, \dots), \dots, F_p(x_{i_p+1}, \dots), \dots) \end{aligned}$$

où  $\tau = \sum_{k=1}^p i_k(|F_k|+1)$ . Les applications  $a^{1,p} : \mathfrak{G}_{\mathcal{I}} \otimes \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes p} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et  $a^{q \geq 2, p} = 0$  donnent une unique structure de bigèbre sur l'algèbre cotensorielle colibre  $T = \oplus_{n \geq 0} \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes n}$ . De même, en posant  $a^1$  comme étant égale au cobord de Hochschild  $\mathbf{b}$ ,  $a^2$  le produit  $M^2$ , et  $a^{q \geq 3} = 0$ , on obtient une unique structure de bigèbre différentielle sur la cogèbre tensorielle  $T$ . Le Théorème 3.1 dans [8] nous assure que ces applications induisent une structure de bigèbre différentielle sur la cogèbre colibre  $T$ , ce qui nous donne la structure d'algèbre  $G_\infty$  voulue sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ . Par construction, les applications  $M^{p_1, \dots, p_k}$  sont nulles pour  $k > 2$ . De plus, l'application  $M^2$  coïncide, à un cobord de Hochschild près, avec le produit  $M^2$  car, après passage à la cohomologie, elles donnent toutes les deux la même application  $m^2$ , correspondant au produit extérieur  $\wedge$  de l'algèbre de Gerstenhaber  $(\mathfrak{g}, [-, -]_S, \wedge)$ .

## 4 Obstructions à la formalité entre $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ et $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$

Dans cette section, nous allons reprendre le plan de la démonstration de Tamarkin ([16], et aussi [9]) du théorème de formalité  $G_\infty$  et montrer que les obstructions à la construction d'un morphisme  $G_\infty$  entre  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d)$  et  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, D)$  (où  $d$  et  $D$  définissent les structures d'algèbre  $G_\infty$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ ) se trouvent dans le groupe de cohomologie de  $(\text{Hom}(\wedge^{\otimes \cdot} \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -])$ . Dans la première sous-section, nous montrerons qu'il existe une autre structure d'algèbre  $G_\infty$  donnée par une différentielle  $d'$  et un morphisme  $G_\infty$ ,  $\psi$ , entre  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d')$  et  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, D)$ . Dans la deuxième sous-section nous montrerons que si le groupe de cohomologie du complexe  $(\text{Hom}(\wedge^{\otimes \cdot} \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -])$  est trivial, on peut construire un morphisme  $G_\infty$ ,  $\psi'$ , entre  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d)$  et  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d')$ . La composée  $\psi \circ \psi'$  sera donc alors bien un morphisme  $G_\infty$  entre  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d)$  et  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, D)$ .

### 4.1 Morphisme $G_\infty$ entre $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d')$ et $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, D)$

Dans cette sous-section, nous allons prouver la proposition suivante

**Proposition 4.1** *Il existe une structure  $G_\infty$  donnée par une différentielle  $d'$  sur  $\wedge \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}$  et un morphisme  $G_\infty \psi : (\wedge \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}, d') \rightarrow (\wedge \underline{\mathfrak{G}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}, D)$  tels que la restriction  $\psi^1 : \mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  est l'application de Hochschild-Kostant-Rosenberg définie en section 2 (voir théorème 2.3 et théorème 2.5).*

Démonstration: Pour  $n \geq 0$ , on notera

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n]} = \bigoplus_{p_1 + \dots + p_k = n} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_1} \wedge \dots \wedge \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_k}$$

et  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]} = \sum_{k \leq n} \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[k]}$ . De même, on notera  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[n]} = \bigoplus_{p_1 + \dots + p_k = n} \underline{\mathfrak{G}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_1} \wedge \dots \wedge \underline{\mathfrak{G}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_k}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]} = \sum_{k \leq n} \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[k]}$ . Soit  $D^{p_1, \dots, p_k} : \underline{\mathfrak{G}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_1} \wedge \dots \wedge \underline{\mathfrak{G}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_k} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  les composantes de la différentielle  $D$  définissant la structure  $G_\infty$  de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ . On notera  $D^{[n]}$  et  $D^{[\leq n]}$  les sommes

$$D^{[n]} = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} D^{p_1, \dots, p_k} \quad \text{et} \quad D^{[\leq n]} = \sum_{p \leq n} D^{[p]}.$$

Clairement,  $D = \sum_{n \geq 1} D^{[n]}$ . De la même manière, on note

$$d'_1{}^{[n]} = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} d'^{p_1, \dots, p_k} \quad \text{et} \quad d'_1{}^{[\leq n]} = \sum_{1 \leq k \leq n} d'_1{}^{[k]}.$$

D'après la section précédente, un morphisme  $\psi : (\wedge \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}, d') \rightarrow (\wedge \underline{\mathfrak{G}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}, D)$  est déterminé de manière unique par ses composantes  $\psi^{p_1, \dots, p_k} : \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_1} \wedge \dots \wedge \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_k} \rightarrow \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ . On pose alors encore

$$\psi^{[n]} = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} \psi^{p_1, \dots, p_k} \quad \text{et} \quad \psi^{[\leq n]} = \sum_{1 \leq k \leq n} \psi^{[k]},$$

et aussi  $d' = \sum_{n \geq 1} d'^{[n]}$  et  $\psi = \sum_{n \geq 1} \psi^{[n]}$ .

Pour construire la différentielle  $d'$  et le morphisme  $\psi$ , on va construire les applications  $d'^{[n]}$  et  $\psi^{[n]}$  par récurrence. Pour les premiers termes, on pose  $d'^{[1]} = 0$  et  $\psi^{[1]}$  est l'isomorphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg du théorème 2.5.

Supposons construites les applications  $(d'^{[i]})_{i \leq n-1}$  et  $(\psi^{[i]})_{i \leq n-1}$  vérifiant les conditions

$$\psi^{[\leq n-1]} \circ d'^{[\leq n-1]} = D^{[\leq n-1]} \circ \psi^{[\leq n-1]}$$

sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n-1]}$  et

$$d'^{[\leq n-1]} \circ d'^{[\leq n-1]} = 0$$

sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]}$ . Ces conditions suffisent pour nous assurer que  $d'_1$  est une différentielle et que  $\psi$  est un morphisme de cogèbre différentielle. Si l'on reformule l'identité  $\psi \circ d' = D \circ \psi$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n]}$ , on obtient

$$\psi^{[\leq n]} \circ d'^{[\leq n]} = D^{[\leq n]} \circ \psi^{[\leq n]}. \quad (4.1)$$

Si l'on tient compte, maintenant, du fait que  $d'^{[1]} = 0$ , et que sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n]}$  on a  $\psi^{[k]} \circ d'^{[l]} = D^{[k]} \circ \psi^{[l]} = 0$  pour  $k + l > n + 1$ , l'identité (4.1) devient

$$\psi^{[1]} d'^{[n]} + B = D^{[1]} \psi^{[n]} + A \quad (4.2)$$

où  $B = \sum_{k=2}^{n-1} \psi^{[\leq n-k+1]} d'^{[k]}$  et  $A = D^{[1]} \psi^{[\leq n-1]} + \sum_{k=2}^n D^{[k]} \psi^{[\leq n-k+1]}$  (on oubliera, par la suite, le symbole de composition  $\circ$ ). Le terme  $D^{[1]}$  dans (4.2) est le cobord de Hochschild  $b$ . Alors, grâce au théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg entre  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , l'identité (4.2) est équivalente au fait que la cochaîne  $B - A$  est un cocycle de Hochschild. Ainsi, pour montrer l'existence de  $d'^{[n]}$  et  $\psi^{[n]}$ , il sera suffisant de montrer que

$$D^{[1]}(B - A) = 0 \quad (4.3)$$

et de montrer ensuite que pour n'importe quel choix de cobord  $\psi^{[n]}$ , on aura toujours

$$d'^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} = 0 \text{ sur } \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}. \quad (4.4)$$

• Commençons par construire  $d'^{[2]}$  : pour  $n = 2$ , on obtient  $A = D^{[1]} \psi^{[1]} + D^{[2]} \psi^{[1]}$  et  $B = 0$  et donc

$$\psi^{[1]} d'^{[2]} = D^{[1]}(\psi^{[2]} + \psi^{[1]}) + D^{[2]} \psi^{[1]}.$$

Ainsi  $d'^{[2]}$  est l'image de  $D^{[2]}$  par la projection sur la cohomologie de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  et puisque l'application de Hochschild-Kostant-Rosenberg  $\psi^{[1]}$  est injective de  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  ( $= H(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, b = D^{[1]})$ ) vers  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , on obtient

$$d'^{[2]} = d^{[2]}.$$

• Prouvons maintenant (4.3) : on a  $D^{[1]}(-A) = -\sum_{k=2}^n D^{[1]} D^{[k]} \psi^{[\leq n-k+1]}$ . En utilisant  $D \circ D = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} D^{[1]}(-A) &= \sum_{k=2}^n \left( \sum_{l=2}^k D^{[l]} D^{[k+1-l]} \right) \psi^{[\leq n-k+1]} \\ &= \sum_{l=2}^n D^{[l]} \left( \sum_{k=l}^n D^{[k+1-l]} \psi^{[\leq n-k+1]} \right). \end{aligned}$$

On a clairement  $\sum_{k=l}^n D^{[k+1-l]} \psi^{[\leq n-k+1]} = \sum_{k=1}^{n-l+1} D^{[k]} \psi^{[\leq n-k+2-l]}$ . Si on utilise encore le fait que  $d^{[a]} d^{[b]} \psi^{[c]} = 0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n]}$  pour  $a + b + c > n + 2$ , on peut ajouter des termes  $(\psi^{[n-k+2-l+k']})_{0 \leq k' \leq k-1}$  to  $\psi^{[\leq n-k+2-l]}$  sans changer l'égalité précédente. On a ainsi

$$D^{[1]}(-A) = \sum_{l=2}^n D^{[l]} \left( \sum_{k=1}^{n-l+1} D^{[k]} \right) \psi^{[\leq n+1-l]} = \sum_{l=2}^n D^{[l]} D^{[\leq n+1-l]} \psi^{[\leq n+1-l]}.$$

Puisque  $(D^{[l]})_{l \geq 2}$  envoie  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[\leq k]}$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[\leq k-1]}$ , l'égalité précédente n'a de termes non-triviaux que sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n-1]}$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence  $\psi^{[\leq k]} d'^{[\leq k]} = D^{[\leq k]} \psi^{[\leq k]}$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq k]}$  pour  $k \leq n-1$ . On obtient

$$D^{[1]}(-A) = \sum_{l=2}^n D^{[l]} \psi^{[\leq n+1-l]} d'^{[\leq n+1-l]}.$$

On a maintenant

$$D^{[1]}(B - A) = D^{[1]} \sum_{k=2}^{n-1} \psi^{[\leq n-k+1]} d'^{[k]} + \sum_{l=2}^n D^{[l]} \psi^{[\leq n+1-l]} d'^{[\leq n+1-l]}.$$

Le terme correspondant à  $l = n$  s'annule puisque  $d'^{[1]} = 0$ . En projetant toujours sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n]}$  les applications de type  $D^{[a]} \psi^{[b]} d'^{[c]}$ , on peut ajouter des applications  $\psi^{[p+p']}$  ( $p' \geq 0$ ) à  $\psi^{[\leq p]}$ . On obtient alors, après réindexation,

$$D^{[1]}(B - A) = \sum_{l=2}^{n-1} D^{[\leq n+1-l]} \psi^{[\leq n-1]} d'^{[l]}.$$

On a ainsi montré que  $D^{[1]}(B - A) = \sum_{l=2}^{n-1} D^{[\leq n+1-l]} \psi^{[\leq n+1-l]} d'^{[l]}$ . Puisque  $d'^{[l]}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq k]}) \subset \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq k-1]}$ , on peut encore utiliser l'hypothèse de récurrence et on obtient

$$D^{[1]}(B - A) = \sum_{l=2}^{n-1} \psi^{[\leq n+1-l]} d'^{[\leq n+1-l]} d'^{[l]} = 0$$

car  $d'^{[1]} = 0$  et  $d'^{[\leq n-1]} d'^{[\leq n-1]} = 0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]}$ , encore par hypothèse de récurrence

• On prouve finalement (4.4), c'est-à-dire  $d'^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} = 0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}$ . Puisque  $\psi^{[1]}$  est un quasi-isomorphisme entre  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, 0)$  et  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, b = D^{[1]})$ , il nous suffit de montrer que

$$\psi^{[1]} d'^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} \text{ est un bord sur } \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}.$$

Après avoir projeté les applications, on obtient l'identité suivante sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}$  :

$$\psi^{[1]} d'^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} = \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} d'^{[\leq n]}.$$

D'après la définition de  $d'^{[\leq n]}$  on peut écrire  $\psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} = D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]}$  car  $d'^{[\leq n]}$  envoie  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]}$ . Ainsi, il sera suffisant de montrer que  $D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]}$  est un bord quand on le restreint à  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}$ . On a alors

$$D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} = b \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} + \sum_{2 \leq k \leq n} D^{[\leq k]} \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]}.$$

Puisque  $\sum_{2 \leq k \leq n} D^{[\leq k]}$  envoie  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[\leq k]}$  sur  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{[\leq k-1]}$ , l'expression

$$\sum_{2 \leq k \leq n} D^{[\leq k]} \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]}$$

a des composantes non nulle seulement sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}$ . Sur ce dernier espace, on a

$$\sum_{2 \leq k \leq n} D^{[\leq k]} \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} = \sum_{2 \leq k \leq n} D^{[\leq k]} D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]},$$

d'après la définition de  $d'^{[\leq n]}$ . Ainsi, on obtient les identités suivantes sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+1]}$  :

$$\begin{aligned} D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} &= b \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} - b D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]} + D^{[\leq n]} D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]} \\ &= b \psi^{[\leq n]} d'^{[\leq n]} - b D^{[\leq n]} \psi^{[\leq n]} \end{aligned}$$

puisque  $D \circ D = 0$ . □

## 4.2 Morphisme $G_{\infty}$ entre $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d)$ et $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d')$

Dans cette sous-section nous allons montrer la proposition :

**Proposition 4.2** *Si le complexe  $(\text{Hom}(\wedge^{\bullet} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \bullet}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [m_1^{1,1} + m_1^2, -])$  est concentré en bidegré  $(0, 0)$ , il existe un morphisme  $G_{\infty}, \psi' : (\wedge^{\bullet} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \bullet}, d) \rightarrow (\wedge^{\bullet} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \bullet}, d')$  tel que la restriction  $\psi'^{[1]} : \mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  est l'identité.*

Nous utiliserons les mêmes notations pour  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n]}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]}, d'^{[n]}$  et  $d'^{[\leq n]}$  que dans la sous-section précédente. Nous noterons aussi

$$d = \sum_{n \geq 1} d^{[n]} \quad \text{et} \quad d^{[\leq n]} = \sum_{1 \leq k \leq n} d^{[k]}$$

et similarly

$$\psi' = \sum_{n \geq 1} \psi'^{[n]} \quad \text{et} \quad \psi'^{[\leq n]} = \sum_{1 \leq k \leq n} \psi'^{[k]}.$$

Démonstration: Nous allons construire les applications  $\psi'^{[n]}$  par récurrence comme dans la sous-section précédente. Pour  $\psi'^{[1]}$  nous poserons :

$$\psi'^{[1]} = \text{id} \text{ (l'application identité).}$$

Supposons construites les applications  $(\psi'^{[i]})_{i \leq n-1}$  satisfaisant

$$\psi'^{[\leq n-1]} d^{[\leq n]} = d'^{[\leq n]} \psi'^{[\leq n-1]}$$

sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n]}$  ( $d'^{[\leq n]}$  envoie  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq l]}$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq l-1]}$ ). L'équation  $\psi' d = d' \psi'$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n+1]}$ , nous donne

$$\psi'^{[\leq n]} d^{[\leq n+1]} = d'^{[\leq n+1]} \psi'^{[\leq n]}. \quad (4.5)$$

Puisque  $d^{[i]} = 0$  pour  $i \neq 2$ ,  $d'^{[1]} = 0$  et que sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n+1]}$  on a  $\psi'^{[k]} d^{[l]} = d'^{[\leq k]} \psi'^{[l]} = 0$  pour  $k + l > n + 2$ , l'identité (4.5) devient

$$\psi'^{[\leq n]} d^{[2]} = \sum_{k=2}^{n+1} d'^{[k]} \psi'^{[\leq n-k+2]}.$$

Nous avons vu dans la sous-section précédente que  $d'^{[2]} = d^{[2]}$ . Ainsi (4.5) devient équivalent à

$$d^{[2]} \psi'^{[\leq n]} - \psi'^{[\leq n]} d^{[2]} = [d^{[2]}, \psi'^{[\leq n]}] = - \sum_{k=3}^{n+1} d'^{[k]} \psi'^{[\leq n-k+2]}.$$

Remarquons que  $d^{[2]} = m_1^{1,1} + m_1^2$ . Le complexe  $(\text{Hom}(\wedge^{\otimes \cdot} \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [d^{[2]}, -])$  est acyclique, ce qui nous assure que la construction de  $\psi'^{[\leq n]}$  sera possible quand  $\sum_{k=3}^{n+1} d'^{[k]} \psi'^{[\leq n-k+2]}$  est un cocycle dans ce complexe. Ainsi, pour finir la preuve, il nous reste à montrer que

$$\left[ d^{[2]}, \sum_{k=3}^{n+1} d'^{[k]} \psi'^{[\leq n-k+2]} \right] = 0 \text{ sur } \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[n+1]}. \quad (4.6)$$

On a

$$D_n = \left[ d^{[2]}, \sum_{k=3}^{n+1} d'^{[k]} \psi'^{[\leq n-k+2]} \right] = \left[ d^{[2]}, \sum_{k=1}^{n-1} d'^{[n+2-k]} \psi'^{[\leq k]} \right].$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[ d^{[2]}, d'^{[n+2-k]} \right] \psi'^{[\leq k]} - \sum_{k=1}^{n-1} d'^{[n+2-k]} \left[ d^{[2]}, \psi'^{[\leq k]} \right]. \quad (4.7)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour  $(\psi'^{[\leq k]})_{k \leq n-1}$ , on obtient

$$[d^{[2]}, \psi'^{[\leq k]}] = - \sum_{l=3}^{k+1} d'^{[l]} \psi'^{[\leq k-l+2]} = - \sum_{l=1}^{k-1} d'^{[k+2-l]} \psi'^{[\leq l]}$$

sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq k+1]}$ . L'équation 4.7 devient alors

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[ d^{[2]}, d'^{[n+2-k]} \right] \psi'^{[\leq k]} + \sum_{k=1}^{n-1} d'^{[n+2-k]} \left( \sum_{l=1}^{k-1} d'^{[k+2-l]} \psi'^{[\leq l]} \right).$$

Finalement on a

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[ d^{[2]}, d'^{[n+2-k]} \right] \psi'^{[\leq k]} + \sum_{l=1}^{n-2} \left( \sum_{k=l+1}^{n-1} d'^{[n+2-k]} d'^{[k+2-l]} \right) \psi'^{[\leq l]}.$$

Ceci implique que

$$-D_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \left[ d'^{[2]}, d'^{[n+2-k]} \right] + \sum_{p=k+1}^{n-1} d'^{[n+2-p]} d'^{[p+2-k]} \right) \psi'^{[\leq k]}.$$

Mais les applications

$$\left[ d'^{[2]}, d'^{[n+2-k]} \right] + \sum_{p=k+1}^{n-1} d'^{[n+2-p]} d'^{[p+2-k]} = \sum_{q=2}^{n+2-k} d'^{[q]} d'^{[n+4-q-k]}$$

sont nulles car  $d' \circ d' = 0$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{[\leq n+2-k]}$ . Ceci donne le résultat.  $\square$

## 5 De la formalité à la star-représentation

Dans cette section, nous considérons un champ de tenseurs de Poisson  $P$  compatible avec la sous-variété  $C$ . Nous allons montrer comment l'existence d'un morphisme  $G_\infty$  entre  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , construit dans la section précédente (sous réserve que le complexe  $(\text{Hom}(\wedge^* \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes \bullet}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -])$  est concentré en bidegré  $(0, 0)$ ), nous permet construire un star-produit défini par des cochaînes compatibles et donc tel que  $\mathcal{I}[[\hbar]]$  est un idéal à gauche dans  $(\mathcal{A}[[\hbar]], *)$  (ce qui impliquera la star-représentation).

Nous allons montrer dans un premier temps que le morphisme  $G_\infty$  de la section précédente entre les algèbres  $G_\infty$ ,  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, d)$  et  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, D)$ , se restreint en un morphisme  $L_\infty$  entre  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  (vues cette fois comme algèbre  $L_\infty$ ). Remarquons, tout d'abord que les différentielles  $d$  et  $D$  définissant les structures d'algèbre  $G_\infty$  sur  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  se restreignent sur  $\wedge^* \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et  $\wedge^* \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$  respectivement en les codifférentielles  $m^{1,1} (= [-, -]_S)$  et  $M^1 + M^{1,1} (= \mathbf{b} + [-, -]_G)$  respectivement (en effet, d'après la fin de la Section 3, les applications  $M^{p_1, \dots, p_k}$  sont nulles pour  $k > 2$ ). Ainsi, on restreignant l'application  $\phi = \psi \circ \psi' : (\wedge^* \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}^{\otimes \bullet}, d) \rightarrow (\wedge^* \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}^{\otimes \bullet}, D)$  à  $\phi : \wedge^* \mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \rightarrow \wedge^* \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}$ , on obtient bien un morphisme  $L_\infty$  entre  $(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}, m^{1,1})$  et  $(\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}, M^1 + M^{1,1})$ .

À partir de maintenant, on va supposer que  $X$  est une variété de Poisson munie d'un champ de tenseur  $P$  (satisfaisant  $[P, P]_S = 0$ ) compatible avec la sous-variété  $C$ . Soit  $\hbar$  un paramètre formel et étendons  $\phi$  en un morphisme  $L_\infty \mathbb{R}[[\hbar]]$ -linéaire  $\wedge^* \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}[[\hbar]] \rightarrow \wedge^* \mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[[\hbar]]$ . Ce morphisme  $L_\infty$  nous permet de construire un star-produit  $\star$  sur  $X$  (see [1]), "compatible"

(c'est-à-dire tel que  $\mathcal{I}[[\hbar]]$  est un idéal à gauche dans  $(\mathcal{A}[[\hbar]], *)$ ) : posons  $P_{\hbar} = \sum_{n \geq 0} \hbar^n \wedge^n P \in \wedge^* \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  où  $\wedge^n P = \underbrace{P \wedge \cdots \wedge P}_{n \text{ fois}}$  (ici  $\wedge$  n'est pas le produit extérieur des champs de vecteurs mais  $a \wedge b$  est un élément de  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \wedge \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ ). Définissons maintenant  $m_{\star} = \phi(P_{\hbar})$ , on obtient

$$[m_{\star}, m_{\star}]_G = 0. \quad (5.1)$$

Ceci est la conséquence de la définition d'un morphisme  $L_{\infty}$  et du fait  $[P, P]_S = 0$  implique  $m^{1,1}(P_{\hbar}) = 0$ . L'application  $m_{\star}$  est un élément de  $\mathfrak{G}_{\mathcal{I}}[[\hbar]]$  de degré 1, elle définit donc une application dans  $C^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})[[\hbar]]$ , où  $C^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})[[\hbar]]$  désigne l'ensemble de applications  $\mathbb{R}[[\hbar]]$ -bilinéaires dans  $C^2(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ . L'identité 5.1 implique que  $m_{\star}$  est un produit associatif sur  $\mathcal{A}[[\hbar]]$ . Enfin, par définition de  $\phi$ , on a :

$$m_{\star} = m + \hbar \phi^1(P) + \sum_{n \geq 2} \hbar^n \phi^n(P, \dots, P),$$

où  $\phi^1(P)$  est l'image du crochet de Poisson par le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg défini Section 2. Notons que  $\phi^1(P)(f, g) - \phi^1(P)(g, f) = 2\{f, g\}$  car  $\phi^1$  est le morphisme de Hochschild-Kostant-Rosenberg usuel auquel on a rajouté des termes symétriques. Enfin les  $\phi^n(P, \dots, P)$  sont des cochaînes compatibles. Ceci nous donne le résultat souhaité.

## 6 Calcul des obstructions

Dans les sections précédentes, nous avons vu que, dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $C = \mathbb{R}^{n-\nu}$ , les obstructions à la construction de star-représentations résidaient dans le groupe de cohomologie de  $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^* \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$ . Dans cette section, nous nous proposons de calculer ces obstructions. plus précisément, on munit un élément  $x \in \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_1} \wedge \dots \wedge \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes p_n}$  du bidegré  $(\sum_{i=1}^n p_i - 1, n - 1)$ . Cette graduation donne une structure de bicomplexe à l'espace vectoriel  $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^* \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$  pour laquelle  $[-, -]_S$  est de bidegré  $(0, 1)$  et  $\wedge$  de bidegré  $(1, 0)$  cf. [16]. Dans la première sous-section, nous montrerons que le complexe

$$\left(\mathrm{Hom}(\wedge^* \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$$

est concentré en bidegré  $(0, 0)$  si le complexe

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^* \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\right),$$

est concentré en degré 0, où  $\delta = \delta^{1,1} + \delta^2$  est l'application duale de  $[m^{1,1} + m^2, -] = [[-, -]_S + \wedge, -]$  et  $\Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}}$  est le module des 1-formes différentielles



de Kähler de l'algèbre  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ . Enfin, dans la deuxième sous-section, nous discuterons les cas où nous conjecturons que ce complexe est concentré en degré 0. On dira parfois abusivement qu'un complexe est acyclique pour dire qu'il est concentré en degré (ou bidegré) 0  $((0, 0))$ .

### 6.1 Réduction du complexe $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^{\cdot} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}+}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$

Dans cette partie on s'attache à démontrer

**Proposition 6.1** *Le complexe  $\left(\mathrm{Hom}(\wedge^{\cdot} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}+}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$  est acyclique si le complexe  $\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^{\cdot} \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\right)$  l'est.*

Démonstration: La multiplication  $m^2$  donne une structure de  $\mathfrak{g}$ -module à gauche à l'espace vectoriel  $\mathfrak{g} \otimes V$  (par multiplication sur le premier facteur) pour tout espace gradué  $V$ . On a un isomorphisme de complexes :

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{Hom}(\wedge^{\cdot} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [m^{1,1} + m^2, -]\right) &\cong \\ &\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^{\cdot} \mathfrak{g} \otimes \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [m^{1,1} + m^2, -]\right). \end{aligned}$$

La différentielle  $[m^2, -]$  induite sur le dernier complexe est la duale d'une différentielle induite par  $\delta^2$  sur  $\wedge^{\cdot} \mathfrak{g} \otimes \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}$  qui n'est autre que la différentielle de Harrison  $\beta$  sur chaque facteur  $\mathfrak{g} \otimes \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}}^{\otimes \cdot}$ . Un argument standard de suites spectrales *c.f.* [16], [9] assure que si l'homologie du complexe de Harrison  $\left(\mathfrak{g} \otimes \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}+}^{\otimes \cdot}, \beta\right)$  de  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  à coefficient dans  $\mathfrak{g}$  est égale à  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}^1$  alors on a un quasi-isomorphisme de complexes :

$$\left(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^{\cdot} \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1}\right) \rightarrow \left(\mathrm{Hom}(\wedge^{\cdot} \underline{\mathfrak{g}}_{\mathcal{I}+}^{\otimes \cdot}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), [[-, -]_S + \wedge, -]\right)$$

On note  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+} = k \oplus \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  l'algèbre unitaire obtenue en ajoutant une unité à l'idéal  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$ . Rappelons qu'en caractéristique 0, l'homologie de Harrison est égale à l'homologie d'André-Quillen (à un décalage du degré de un près) que l'on note  $AQ_{\cdot}(B/A, M)$  pour une  $A$ -algèbre  $B$  et un  $A$ -module  $M$ . On a une suite d'inclusions de sous-algèbres graduées commutatives et unitaires  $k \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{I}+} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ . Pour tout  $\mathfrak{g}$ -module  $M$ , la suite exacte de Jacobi-Zariski associée s'écrit

$$\begin{aligned} \cdots AQ_{\cdot+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, M) &\rightarrow AQ_{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}/k, M) \\ &\rightarrow AQ_{\cdot}(\mathfrak{g}/k, M) \rightarrow AQ_{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

On s'intéresse au cas  $M = \mathfrak{g}$ . On a un isomorphisme  $AQ_{\cdot}(\mathfrak{g}/k, \mathfrak{g}) \cong \Omega_{\mathfrak{g}/k}^1$  car  $\mathfrak{g}$  est symétrique ce qui ramène le calcul de  $AQ_{\cdot}(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}/k, \mathfrak{g})$  à celui de  $AQ_{\cdot+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, \mathfrak{g})$ . Rappelons que  $AQ_{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, M) \cong HH_{\cdot+1}^{(1)}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}, M)$  où  $HH_{\cdot}^{(n)}(B/A, M)$  désigne la partie de poids  $n$  dans la  $\lambda$ -décomposition de

l'homologie de Hochschild pour toute  $A$ -algèbre  $B$  et  $B$ -module  $M$  ([13], Section 4). Il est bien connu que l'homologie de Hochschild est égale à l'homologie du complexe normalisé défini, pour tout  $m \geq 0$ , par  $\overline{C}_m^{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}(\mathfrak{g}, M) = M \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+})^{\otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} n}$  muni de la différentielle de Hochschild  $\mathbf{b}$ . On s'intéresse au cas  $M = \mathfrak{g}$ . Comme  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+} = k \oplus \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  et que  $\mathfrak{g}_{\mathcal{I}}$  est un idéal, la projection  $\mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$  induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}) \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \cdots \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}) &\cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\mathcal{I}} \otimes_k (\tilde{\mathfrak{g}}/k) \otimes_k \cdots \otimes_k (\tilde{\mathfrak{g}}/k) \\ &\cong \tilde{\mathfrak{g}} \otimes_k (\tilde{\mathfrak{g}}/k) \otimes_k \cdots \otimes_k (\tilde{\mathfrak{g}}/k). \end{aligned}$$

Le Théorème d'Hochschild-Kostant-Rosenberg appliqué à l'algèbre symétrique  $\tilde{\mathfrak{g}}$  donne un isomorphisme

$$H(\overline{C}^k(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{g}})) \cong HH(\tilde{\mathfrak{g}}) \cong \Lambda^1 \Omega_{\tilde{\mathfrak{g}}}^1.$$

On en déduit l'isomorphisme cherché  $AQ(\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}/k, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}^1$  et la suite exacte de  $\mathfrak{g}$ -modules

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}^1 \hookrightarrow \Omega_{\mathfrak{g}}^1 \twoheadrightarrow \Omega_{\tilde{\mathfrak{g}}}^1$$

où la structure de  $\mathfrak{g}$ -module de  $\Omega_{\tilde{\mathfrak{g}}}^1$  est induite par la projection  $\mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ . □

## 6.2 Acyclicité du complexe $(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1})$

Un calcul simple nous donne déjà :

**Proposition 6.2** *Dans le cas  $n = 1 = \nu$ , le complexe  $(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g} \otimes_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}} \Omega_{\mathfrak{g}_{\mathcal{I}+}}, \mathfrak{g}_{\mathcal{I}}), \delta^{1,1})$  est acyclique, c'est-à-dire qu'il est concentré en degré 0.*

Nous conjecturons que ce complexe est acyclique dans le cas  $\nu = 1$  : une indication forte est le fait qu'il est toujours possible de représenter un star-produit, ce qui a été montré par Glöbner (voir [10, Lemma 1], [2]) :

**Théorème 6.1 (Glöbner 1998)** *Si  $C$  est une sous-variété coïso trope de codimension 1 dans  $X$  et  $*$  un star-produit sur  $X$ . Alors on peut construire une star-représentation.*

L'acyclicité du complexe ci-dessus nous permettrait, une globalisation du théorème de formalité dans le cas  $\nu = 1$  (en reprenant la preuve de [5]).

Enfin, ce travail nous donne une expression simple des obstructions à la formalité qui résident surtout dans la ou les différentielles  $d'$  possibles : on peut imaginer, aux vues des obstructions à la représentabilité liées aux classes d'Atiyah-Molino jusqu'à l'ordre 3 d'un star-produit symplectique (voir [2]), qu'il faille demander à la structure de Poisson compatible des conditions additionnelles pour qu'elle soit représentable.

## Références

- [1] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D. : *Deformation Theory and Quantization*. Annals of Physics **111** (1978), part I : 61-110, part II : 111-151.
- [2] Bordemann, M. : *(Bi)modules, morphismes et réductions des star-produits : le cas symplectique et classes caractéristiques des feuilletages*. Prépublication, à paraître.
- [3] Bordemann, M., Herbig, H.-C., Waldmann, S. : *BRST cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantisation*, Commun.Math.Phys. **210** (2000), 107-144.
- [4] Deligne, P. : *Letter to Stasheff*, Gerstenhaber May Schechtman, Drinfeld (1993).
- [5] Dolgushev, V. : *Covariant and Equivariant Formality Theorems*, I preprint QA\ 0307212 (2003).
- [6] Etingof, P., Kazhdan, D. : *Quantization of Lie bialgebras I*, Selecta Math., N.S. (2) **n.1** (1996), 1-41. *Quantization of Lie bialgebras II*, Selecta Math., N.S.(4) **n.2** (1998), 213-231, 233-269.
- [7] Gerstenhaber, M. : *The Cohomology Structure of an Associative Ring*. Ann. Math. **78** (1963), 267-288.
- [8] Gerstenhaber, M., Voronov, A. : *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153
- [9] Ginot, G., Halbout, G. : *A deformed version of Tamarkin's formality Theorem*, prépublication de l'IRMA (2002).
- [10] Glöbner, P. : *Star-Product Reduction for Coisotropic Submanifolds of Codimension 1*. Prépublication Faculté de Physique de l'Université de Freiburg FR-THEP-98/10, math.QA/9805049, mai 1998.
- [11] Kadeishvili, T. : *Structure of  $A(\infty)$ -algebra and Hochschild and Harrison cohomology*. Proc. of A.Razmadze Math.Inst. **91** (1988), 20-27, voir aussi math.AT/0210331
- [12] Kontsevich, M. : *Deformation quantization of Poisson manifolds I*, prépublication IHES, QA/9709070 (1997).
- [13] Loday, J.-L. : *Cyclic homology*, Springer-Verlag 1992.
- [14] Lu, J.-H. : *Moment Maps at the Quantum Level*. Commun. Math. Phys. **157** (1993), 389-404.
- [15] Stasheff, J.D. : *On the homology associativity 1 and II*, Transactions of the AMS **108** (1963), 275-292, 293-312.
- [16] Tamarkin, D. : *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*, Preprint math\9803025.